MANUEL

DE

CONSTRUCTION DE TRIANGLES

TOME 1

LUÍS LOPES

QED TEXTE

MANUEL
DE
CONSTRUCTION DE TRIANGLES

MANUEL
DE
CONSTRUCTION DE TRIANGLES

Luís Lopes, Ph.D.

QED TEXTE
Boucherville, Québec

Cet ouvrage a été entièrement composé par l'auteur avec TEX, PICTEX et $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX.
TEX is a trademark of the American Mathematical Society.
$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX is the TEX macrosystem of the American Mathematical Society.
Mathematica is a trademark of Wolfram Research Inc.

ISBN 2-9802730-5-8

Dépôt légal - deuxième trimestre 1996

Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Imprimé au Canada

PRÉFACE

La résolution de triangles occupe toujours plusieurs pages dans les livres didactiques traditionnels d'algèbre, calcul, géométrie, etc; son importance est donc plus qu'évidente. Cependant, dans leur approche de résolution, les auteurs mettent surtout l'emphase sur les aspects algébrique et numérique du problème, et, pour ces ouvrages, construire ou résoudre un triangle signifie *calculer* les angles et les longueurs des côtés à partir de certains de ses éléments connus numériquement. Nous y voyons alors tout un développement de formules utilisant les fonctions logarithmique et trigonométriques dont le but est de pouvoir résoudre facilement et rapidement les équations qui en découlent.

Cette façon de procéder se justifie par le fait que les calculatrices et les ordinateurs personnels n'étaient pas disponibles et/ou accessibles. Aujourd'hui, ce n'est plus le cas et, avec les logiciels graphiques et symboliques comme Cabri-géomètre (pour les figures) et Mathematica (pour les aspects algébrique et numérique), nous pouvons nous concentrer sur les aspects géométrique, pédagogique et théorique des problèmes. À notre avis, la meilleure façon de s'y prendre est à travers les constructions géométriques.

Les constructions géométriques — les constructions que nous pouvons effectuer à l'aide de la règle non graduée et du compas — et les problèmes qui en découlent ont leurs origines avec les anciens grecs. Malgré cela, ce sujet est demeuré actuel et aujourd'hui encore il n'a pas perdu de son intérêt ni de son importance dans la formation de l'étudiant (nous utiliserons seulement le masculin dans le but d'alléger le texte) des mathématiques en général et de la géométrie en particulier. En effet, les constructions géométriques aident l'étudiant à développer sa concentration, son intuition, sa mémoire et ses sens de l'invention et de l'observation puisque les problèmes, en demeurant simples et faciles à comprendre, réussissent fort bien à le défier et le motiver, tout en lui donnant le goût pour le travail intellectuel et en le stimulant à approfondir ses connaissances.

Cet ouvrage a donc été écrit de façon à exploiter les logiciels cités et résoudre un triangle signifiera, dans un premier temps, construire géométriquement les longueurs de ses côtés et le triangle proprement dit à partir de

À ma sœur Estela, qui m'a toujours aidé
dans mes tâches de petit et grand écolier.

AVANT-PROPOS

Ce manuel a été écrit dans le but d'introduire les constructions géométriques — les constructions que nous pouvons effectuer à l'aide de la règle non graduée et du compas — et de rendre l'étude de la géométrie du triangle plus enrichissante et stimulante. Des logiciels comme Cabri-géomètre, développés pour la construction de figures, permettent à l'étudiant(e) de se concentrer sur les aspects géométrique et théorique des problèmes, laissant les aspects algébrique et numérique à des logiciels comme Mathematica.

Les connaissances nécessaires pour résoudre la majeure partie des problèmes proposés — 371 que nous avons générés de façon systématique et ordonnée afin qu'on puisse les repérer facilement — sont celles acquises lors d'un premier cours de géométrie euclidienne plane et la théorie correspondante se retrouve dans n'importe quel ouvrage didactique. Le restant des problèmes fait appel à des développements algébriques laborieux avec lesquels le lecteur doit être à l'aise ou à des connaissances plus approfondies de la géométrie du triangle. Celles-ci pourront être acquises à travers les théorèmes présentés et démontrés tout au long de l'ouvrage.

Dans plusieurs problèmes, nous devrons résoudre une équation polynomiale du troisième ou quatrième degré. Nous avons écrit un appendice donnant les formules qui résolvent ces équations et en avons profité pour exposer quelques résultats sur la théorie des nombres constructibles.

L'auteur

trois de ses éléments connus d'une façon visuelle (des figures représentant des angles et des segments de droite). Dans un deuxième temps, si cette démarche s'avère difficile ou impossible, résoudre un triangle signifiera calculer algébriquement les longueurs de ses côtés à partir de trois de ses éléments connus d'une façon générique (symbolique). Il est évident que le but de l'une ou l'autre méthode de résolution est de pouvoir connaître les valeurs numériques des longueurs des côtés si nous voulons faire des applications numériques; dans ce cas, pour la méthode graphique, nous ferons appel à la géométrie analytique et au logiciel Cabri-géomètre; pour la méthode algébrique, les équations et systèmes d'équations non linéaires qui en découlent sont facilement résolubles avec Mathematica.

Les connaissances nécessaires pour résoudre la majeure partie des problèmes proposés sont celles acquises lors d'un premier cours de géométrie euclidienne plane et la théorie correspondante peut être retrouvée dans n'importe quel ouvrage didactique; entre autres, nous citons [12], [19], [26] et [28] car ils présentent les sujets d'une façon qui correspond bien à notre approche. Principalement, le lecteur doit connaître les propriétés fondamentales des céviennes[§] et points les plus importants du triangle.

Le restant des problèmes fait appel à des développements algébriques laborieux avec lesquels le lecteur doit être à l'aise ou à des connaissances plus approfondies de la géométrie du triangle. Celles-ci pourront être acquises à travers les théorèmes présentés et démontrés tout au long de l'ouvrage et dans [1] d'une forme plus ordonnée.

Ce manuel est divisé en trois chapitres. Le premier — Considérations générales — est subdivisé en trois sections. Dans la première, nous décrivons en détail les concepts, constructions et lieux géométriques fondamentaux que le lecteur aura besoin de connaître pour pouvoir résoudre les problèmes proposés; dans la section suivante, nous présentons quelques définitions et ensuite nous expliquons les critères retenus pour ordonner les problèmes afin qu'on puisse les repérer facilement; à la dernière section, nous décrivons la méthode qui doit être utilisée pour résoudre les problèmes graphiquement et donnons un exemple.

Notre expérience comme étudiant et enseignant nous a appris que la meilleure façon d'assimiler un sujet est en faisant des exercices — et beaucoup! Afin de procéder de façon systématique — ce qui nous a permis de constater que le problème 157 (le seul!?) possède quatre solutions —, nous proposons, dans le deuxième chapitre, 371 exercices ordonnés selon les critères expliqués dans le premier chapitre. Le symbole $\triangle$ placé au début

[§] Segment de droite qui part d'un sommet d'un triangle et se termine sur le côté (ou son prolongement) opposé. Les céviennes les plus importantes sont les bissectrices extérieure et intérieure, les hauteurs et les médianes.

du problème signifie que celui-ci possède une solution graphique; autrement sa solution est algébrique ou numérique ou les données forment un «datum» (voir le premier problème).

Nous notons que les ouvrages didactiques ne fournissent pas la solution aux problèmes proposés et souvent pas même la réponse. L'étudiant se voit ainsi frustré dans ses efforts de compréhension puisqu'il ne peut jamais être certain de son raisonnement s'il pense qu'il a réussi un problème ou alors, *après avoir passé un certain temps en essayant de le résoudre*, ne peut savoir où se trouve la solution au «casse-tête». Dans ce manuel, le lecteur trouvera, dans le troisième chapitre, une solution détaillée à presque tous les exercices proposés. Ces solutions seront parfois l'objet de commentaires, en plus de servir comme motivation pour le développement de résultats qui ne sont pas normalement mentionnés dans les ouvrages courants.

Dans plusieurs problèmes, nous devrons résoudre une équation polynomiale du troisième ou quatrième degré. Nous avons écrit un appendice donnant les formules qui résolvent ces équations et en avons profité pour exposer quelques résultats sur la théorie des nombres constructibles. Le lecteur intéressé par ce sujet est référé à [3], [11], [13] et [31].

La liste complète des ouvrages consultés se trouve à la fin du volume. L'auteur les a presque tous trouvés à la bibliothèque de l'Université de Montréal et parmi les ouvrages d'autres universités, nous mentionnons [1] (Université de Toronto), [13] (École Polytechnique de Montréal), [16] (Université de Sherbrooke), et [22] (Université d'Alberta à Edmonton).

Nous tenons à remercier Lucie Bibeau pour ses commentaires et son support.

Luís Lopes

Boucherville, Québec
Mai, 1996

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

1 Concepts, constructions et lieux géométriques fondamentaux

1.1 Concepts fondamentaux

En plus des propriétés élémentaires des points et lignes remarquables du triangle, nous supposerons que le lecteur connaît les concepts suivants:

i) mesure d'un angle vis-à-vis le cercle (l'angle au centre, inscrit, etc);

ii) puissance d'un point par rapport à un cercle;

iii) division harmonique d'un segment de droite;

iv) similitude et homothétie;

v) symétrie par rapport à un point (ou rotation de 180° autour de ce point).

1.2 Constructions géométriques fondamentales

Les constructions géométriques suivantes seront effectuées fréquemment et seront supposées connues:

i) transport d'un segment de droite;

ii) transport d'un angle;

iii) par un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite;

iv) par un point pris hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite;

v) par un point pris hors d'une droite, mener une parallèle à cette droite;

vi) tracer la médiatrice d'un segment de droite (mener la perpendiculaire au milieu de ce segment);

vii) diviser un segment de droite en n parties égales;

viii) tracer la bissectrice d'un angle donné;

ix) mener une tangente à un cercle par un point sur ou à l'extérieur de la circonférence;

x) tracer l'arc capable d'un anglé donné sur un segment de droite donné;

xi) construire la quatrième proportionnelle à trois segments de droite donnés;

xii) construire la moyenne proportionnelle entre deux segments de droite donnés;

xiii) trouver la position d'un quatrième point qui forme avec trois autres une division harmonique.

1.3 Lieux géométriques fondamentaux

Les lieux géométriques suivants seront utilisés fréquemment et seront supposés connus:

i) le lieu géométrique des points d'un plan situés à une distance donnée d d'un point donné P de ce plan est la circonférence de centre P et rayon d;

ii) le lieu géométrique des points également distants (i.e., équidistants) de deux points donnés est la médiatrice du segment de droite déterminé par les deux points;

iii) le lieu géométrique des points d'un plan situés à une distance donnée d d'une droite donnée r de ce plan se compose de deux droites parallèles à la droite r et distantes de celle-ci d'une longueur d;

iv) le lieu géométrique des points équidistants de deux droites données qui se coupent est constitué des deux bissectrices des angles formés par ces droites;

v) le lieu géométrique des points situés d'un même côté d'une droite et d'où l'on voit un segment donné AB de cette droite sous un angle donné α est un arc de cercle terminé aux extrémités du segment. Le segment de cercle ainsi tracé est dit l'arc capable de l'angle α sur AB.

2 Notation et classement des problèmes

2.1 Notation

Nous utiliserons la notation suivante pour désigner les points et lignes les plus importants d'un triangle:

A, B, C : sommets du triangle

a, b, c : côtés du triangle opposés aux sommets indiqués par les mêmes lettres majuscules

α, β, γ : angles (intérieurs) du triangle dont les sommets sont **A, B, C**, respectivement

Bissectrices extérieures :
- pieds : T_a, T_b, T_c
- centres des cercles exinscrits : I_a, I_b, I_c
- rayons des cercles exinscrits : r_a, r_b, r_c
- longueurs : t_a (i.e., $\overline{\mathbf{A}T_a}$), t_b (i.e., $\overline{\mathbf{B}T_b}$) et t_c (i.e., $\overline{\mathbf{C}T_c}$)

Bissectrices intérieures :
- pieds : S_a, S_b, S_c
- centre du cercle inscrit : I
- rayon du cercle inscrit : r
- longueurs : s_a (i.e., $\overline{\mathbf{A}S_a}$), s_b (i.e., $\overline{\mathbf{B}S_b}$) et s_c (i.e., $\overline{\mathbf{C}S_c}$)

Hauteurs :
- pieds : H_a, H_b, H_c
- orthocentre : H
- longueurs : h_a, h_b, h_c (i.e., $\overline{\mathbf{A}H_a}$, $\overline{\mathbf{B}H_b}$, $\overline{\mathbf{C}H_c}$)

Médianes :
- pieds : M_a, M_b, M_c
- centre de gravité : G
- longueurs : m_a, m_b, m_c (i.e., $\overline{\mathbf{A}M_a}$, $\overline{\mathbf{B}M_b}$, $\overline{\mathbf{C}M_c}$)

O et R : centre et rayon du cercle circonscrit, respectivement

p : demi-périmètre, i.e., $2p = a + b + c$

S : aire, i.e., $2S = ah_a$

2.2 Critères pour ordonner les problèmes

Afin de générer tous les cas possibles et d'être capables d'en repérer un facilement, nous avons ordonné les problèmes proposés selon les éléments connus du triangle. Nous avons choisi l'ordre suivant: angles, côtés, hauteurs, médianes, bissectrices intérieures, bissectrices extérieures, rayon du cercle circonscrit, rayon du cercle inscrit et rayons des cercles exinscrits. En plus, dans chaque groupe définissant un problème, nous suivons l'ordre alphabétique des sommets et commençons toujours par le sommet **A** pour représenter un élément associé à un sommet. Ainsi, selon le premier critère, le problème α, h_b, R vient avant le problème m_a, s_b, r; de plus, le problème γ, h_b, R ne répondant pas au second critère (γ correspond au sommet C et est donné avant l'élément du sommet B et il n'y a pas d'élément associé au sommet A), nous résoudrons plutôt le problème équivalent α, h_b, R.

Il existe généralement plusieurs représentations possibles d'un même problème et nous ne résolvons que celle définie par nos critères de classement. Par exemple, α, β, a; α, β, b; α, γ, a; α, γ, c; β, γ, b et β, γ, c sont équivalents et représentent tous un problème défini par deux angles et un côté opposé à un de ces deux angles. Selon nos critères, nous retenons donc α, β, a.

Suivant systématiquement ces critères, nous avons généré 371 exercices (un problème combinatoire intéressant serait de calculer ce nombre sans les énumérer). Nous commençons par α, β, γ; suivent α, β, a; α, β, c; ...; r_a, r_b, r_c.

3 Méthode de résolution des problèmes de constructions géométriques

Pour résoudre des problèmes de constructions géométriques, on peut utiliser la méthode suivante qui comprend quatre étapes:

i) *Analyse*: on suppose le problème résolu et on dessine une ébauche de la figure voulue. Une étude des propriétés de cette figure, afin de retrouver les relations ou connexions simples entre ses éléments—connus et inconnus—qui en permettront la construction, est alors effectuée.

ii) *Construction*: on décrit les étapes de la construction proprement dite.

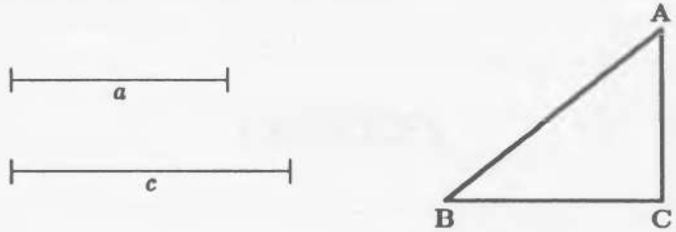
iii) *Démonstration*: on doit démontrer que la figure obtenue satisfait à toutes les conditions demandées.

iv) *Discussion*: on mentionne le nombre de solutions et on donne les conditions que les données doivent satisfaire pour que le problème soit possible.

La construction dépend ordinairement de lieux géométriques qui en déterminent les points clefs.

Exemple: construire un triangle rectangle si on connaît le côté $\overline{\mathrm{BC}} = a$ et l'hypoténuse $\overline{\mathrm{AB}} = c$.

Ébauche de la figure voulue et analyse:



Étude des propriétés:

a) en **C**, l'angle est droit;

b) $\overline{\mathbf{CB}} = a$;

c) le point **A** est sur la perpendiculaire élevée en **C** et à la distance c du point **B**.

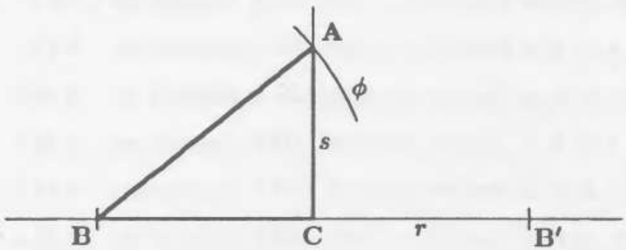
Construction:

a) construire l'angle droit de sommet **C**;

b) porter **B** sur un côté (droite r) de l'angle ($\overline{\mathbf{CB}} = a$);

c) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à c, tracer un arc de cercle (ϕ) qui coupe le second côté de l'angle droit (droite s). Le point de rencontre des deux lieux ($\phi \cap s$) détermine le sommet **A**;

d) joindre **B** à **A**.



Démonstration:

$$\gamma = 90°; \quad \overline{\mathbf{BC}} = a; \quad \overline{\mathbf{AB}} = c; \quad \text{(par construction)}$$

Discussion:

a) le triangle n'est possible que si $c > a$;

b) le problème possède 0 ou 1 solution (noter que $\triangle$ **ABC** est égal (congruent) au $\triangle$ **AB′C** et dans ce cas nous n'avons qu'une seule solution).

CHAPITRE II

EXERCICES

L'énoncé de tous les exercices commence par: Construire ...

Exercice 1) un triangle **ABC** dont on connaît α, β et γ.

Exercice 2) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et a.

Exercice 3) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et c.

Exercice 4) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et h_a.

Exercice 5) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et h_c.

Exercice 6) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et m_a.

Exercice 7) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et m_c.

Exercice 8) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et s_a.

Exercice 9) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et s_c.

Exercice 10) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et t_a.

Exercice 11) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et t_c.

Exercice 12) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et R.

Exercice 13) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et r.

Exercice 14) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et r_a.

Exercice 15) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, β et r_c.

Exercice 16) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et b.

Exercice 17) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et c.

Exercice 18) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et h_a.

Exercice **19)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et h_b.

Exercice **20)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et h_a.

Exercice **21)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et h_b.

Exercice **22)** un triangle **ABC** dont on connaît α, b et h_c.

Exercice **23)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et m_a.

Exercice **24)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et m_b.

Exercice **25)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et m_a.

Exercice **26)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et m_b.

Exercice **27)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et m_c.

Exercice **28)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et s_a.

Exercice **29)** un triangle **ABC** dont on connaît α, a et s_b.

Exercice **30)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et s_a.

Exercice **31)** un triangle **ABC** dont on connaît α, b et s_b.

Exercice **32)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et s_c.

Exercice **33)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et t_a.

Exercice **34)** un triangle **ABC** dont on connaît α, a et t_b.

Exercice **35)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et t_a.

Exercice **36)** un triangle **ABC** dont on connaît α, b et t_b.

Exercice **37)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et t_c.

Exercice **38)** un triangle **ABC** dont on connaît α, a et R.

Exercice **39)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et R.

Exercice **40)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et r.

Exercice **41)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et r.

Exercice **42)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et r_a.

Exercice **43)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, a et r_b.

Exercice **44)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et r_a.

Exercice **45)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et r_b.

Exercice **46)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, b et r_c.

Exercice **47)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et h_b.

Exercice **48)** $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et h_c.

Exercice 49) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et m_a.

Exercice 50) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et m_b.

Exercice 51) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et m_a.

Exercice 52) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et m_b.

Exercice 53) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et m_c.

Exercice 54) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et s_a.

Exercice 55) un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et s_b.

Exercice 56) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et s_a.

Exercice 57) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et s_b.

Exercice 58) un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et s_c.

Exercice 59) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et t_a.

Exercice 60) un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et t_b.

Exercice 61) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et t_a.

Exercice 62) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et t_b.

Exercice 63) un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et t_c.

Exercice 64) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et R.

Exercice 65) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et R.

Exercice 66) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et r.

Exercice 67) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et r.

Exercice 68) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et r_a.

Exercice 69) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_a et r_b.

Exercice 70) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et r_a.

Exercice 71) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et r_b.

Exercice 72) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, h_b et r_c.

Exercice 73) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et m_b.

Exercice 74) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et m_c.

Exercice 75) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et s_a.

Exercice 76) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et s_b.

Exercice 77) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et s_a.

Exercice 78) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et s_b.

Exercice 79) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et s_c.

Exercice 80) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et t_a.

Exercice 81) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et t_b.

Exercice 82) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et t_a.

Exercice 83) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et t_b.

Exercice 84) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et t_c.

Exercice 85) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et R.

Exercice 86) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et R.

Exercice 87) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et r.

Exercice 88) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et r.

Exercice 89) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et r_a.

Exercice 90) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_a et r_b.

Exercice 91) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et r_a.

Exercice 92) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et r_b.

Exercice 93) un triangle **ABC** dont on connaît α, m_b et r_c.

Exercice 94) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et s_b.

Exercice 95) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et s_c.

Exercice 96) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et t_a.

Exercice 97) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et t_b.

Exercice 98) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et t_a.

Exercice 99) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et t_b.

Exercice 100) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et t_c.

Exercice 101) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et R.

Exercice 102) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et R.

Exercice 103) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et r.

Exercice 104) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et r.

Exercice 105) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et r_a.

Exercice 106) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_a et r_b.

Exercice 107) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et r_a.

Exercice 108) $\triangle$ un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et r_b.

Exercice 109) un triangle **ABC** dont on connaît α, s_b et r_c.

Exercice 110) un triangle **ABC** dont on connaît α, t_a et t_b.

Exercice 111) un triangle **ABC** dont on connaît α, t_b et t_c.

Exercice 112) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, t_a et R.

Exercice 113) un triangle **ABC** dont on connaît α, t_b et R.

Exercice 114) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, t_a et r.

Exercice 115) un triangle **ABC** dont on connaît α, t_b et r.

Exercice 116) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, t_a et r_a.

Exercice 117) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, t_a et r_b.

Exercice 118) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, t_b et r_a.

Exercice 119) un triangle **ABC** dont on connaît α, t_b et r_b.

Exercice 120) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, t_b et r_c.

Exercice 121) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, R et r.

Exercice 122) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, R et r_a.

Exercice 123) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, R et r_b.

Exercice 124) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, r et r_a.

Exercice 125) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, r et r_b.

Exercice 126) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, r_a et r_b.

Exercice 127) △ un triangle **ABC** dont on connaît α, r_b et r_c.

Exercice 128) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et c.

Exercice 129) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et h_a.

Exercice 130) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et h_c.

Exercice 131) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et m_a.

Exercice 132) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et m_c.

Exercice 133) un triangle **ABC** dont on connaît a, b et s_a.

Exercice 134) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et s_c.

Exercice 135) un triangle **ABC** dont on connaît a, b et t_a.

Exercice 136) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et t_c.

Exercice 137) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, b et R.

Exercice 138) un triangle **ABC** dont on connaît a, b et r.

Exercice 139) un triangle **ABC** dont on connaît a, b et r_a.

Exercice 140) un triangle **ABC** dont on connaît a, b et r_c.

Exercice 141) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et h_b.

Exercice 142) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et h_c.

Exercice 143) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et m_a.

Exercice 144) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et m_b.

Exercice 145) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et m_a.

Exercice 146) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et m_b.

Exercice 147) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et m_c.

Exercice 148) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et s_a.

Exercice 149) un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et s_b.

Exercice 150) un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et s_a.

Exercice 151) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et s_b.

Exercice 152) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et s_c.

Exercice 153) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et t_a.

Exercice 154) un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et t_b.

Exercice 155) un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et t_a.

Exercice 156) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et t_b.

Exercice 157) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et t_c.

Exercice 158) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et R.

Exercice 159) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et R.

Exercice 160) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et r.

Exercice 161) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et r.

Exercice 162) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et r_a.

Exercice 163) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_a et r_b.

Exercice 164) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et r_a.

Exercice 165) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et r_b.

Exercice 166) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et r_c.

Exercice 167) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, m_a et m_b.

Exercice 168) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, m_b et m_c.

Exercice 169) △ un triangle ABC dont on connaît a, m_a et s_a.

Exercice 170) un triangle ABC dont on connaît a, m_a et s_b.

Exercice 171) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et s_a.

Exercice 172) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et s_b.

Exercice 173) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et s_c.

Exercice 174) △ un triangle ABC dont on connaît a, m_a et t_a.

Exercice 175) un triangle ABC dont on connaît a, m_a et t_b.

Exercice 176) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et t_a.

Exercice 177) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et t_b.

Exercice 178) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et t_c.

Exercice 179) △ un triangle ABC dont on connaît a, m_a et R.

Exercice 180) △ un triangle ABC dont on connaît a, m_b et R.

Exercice 181) un triangle ABC dont on connaît a, m_a et r.

Exercice 182) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et r.

Exercice 183) un triangle ABC dont on connaît a, m_a et r_a.

Exercice 184) un triangle ABC dont on connaît a, m_a et r_b.

Exercice 185) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et r_a.

Exercice 186) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et r_b.

Exercice 187) un triangle ABC dont on connaît a, m_b et r_c.

Exercice 188) un triangle ABC dont on connaît a, s_a et s_b.

Exercice 189) un triangle ABC dont on connaît a, s_b et s_c.

Exercice 190) △ un triangle ABC dont on connaît a, s_a et t_a.

Exercice 191) un triangle ABC dont on connaît a, s_a et t_b.

Exercice 192) un triangle ABC dont on connaît a, s_b et t_a.

Exercice 193) △ un triangle ABC dont on connaît a, s_b et t_b.

Exercice 194) un triangle ABC dont on connaît a, s_b et t_c.

Exercice 195) △ un triangle ABC dont on connaît a, s_a et R.

Exercice 196) un triangle ABC dont on connaît a, s_b et R.

Exercice 197) un triangle ABC dont on connaît a, s_a et r.

Exercice 198) un triangle ABC dont on connaît a, s_b et r.

Exercice 199) un triangle **ABC** dont on connaît a, s_a et r_a.

Exercice 200) un triangle **ABC** dont on connaît a, s_a et r_b.

Exercice 201) un triangle **ABC** dont on connaît a, s_b et r_a.

Exercice 202) un triangle **ABC** dont on connaît a, s_b et r_b.

Exercice 203) un triangle **ABC** dont on connaît a, s_b et r_c.

Exercice 204) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_a et t_b.

Exercice 205) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_b et t_c.

Exercice 206) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, t_a et R.

Exercice 207) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_b et R.

Exercice 208) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_a et r.

Exercice 209) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_b et r.

Exercice 210) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_a et r_a.

Exercice 211) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_a et r_b.

Exercice 212) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_b et r_a.

Exercice 213) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_b et r_b.

Exercice 214) un triangle **ABC** dont on connaît a, t_b et r_c.

Exercice 215) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, R et r.

Exercice 216) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, R et r_a.

Exercice 217) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, R et r_b.

Exercice 218) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, r et r_a.

Exercice 219) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, r et r_b.

Exercice 220) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, r_a et r_b.

Exercice 221) △ un triangle **ABC** dont on connaît a, r_b et r_c.

Exercice 222) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et h_c.

Exercice 223) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et m_a.

Exercice 224) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et m_c.

Exercice 225) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et s_a.

Exercice 226) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et s_c.

Exercice 227) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et t_a.

Exercice 228) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, h_b et t_c.

Exercice 229) un triangle ABC dont on connaît h_a, h_b et R.

Exercice 230) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, h_b et r.

Exercice 231) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, h_b et r_a.

Exercice 232) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, h_b et r_c.

Exercice 233) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et m_b.

Exercice 234) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et m_c.

Exercice 235) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et s_a.

Exercice 236) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et s_b.

Exercice 237) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et s_a.

Exercice 238) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et s_b.

Exercice 239) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et s_c.

Exercice 240) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et t_a.

Exercice 241) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et t_b.

Exercice 242) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et t_a.

Exercice 243) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et t_b.

Exercice 244) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et t_c.

Exercice 245) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et R.

Exercice 246) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et R.

Exercice 247) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et r.

Exercice 248) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et r.

Exercice 249) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et r_a.

Exercice 250) △ un triangle ABC dont on connaît h_a, m_a et r_b.

Exercice 251) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et r_a.

Exercice 252) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et r_b.

Exercice 253) un triangle ABC dont on connaît h_a, m_b et r_c.

Exercice 254) un triangle ABC dont on connaît h_a, s_a et s_b.

Exercice 255) un triangle ABC dont on connaît h_a, s_b et s_c.

Exercice 256) un triangle ABC dont on connaît h_a, s_a et t_a.

Exercice 257) un triangle ABC dont on connaît h_a, s_a et t_b.

Exercice 258) un triangle ABC dont on connaît h_a, s_b et t_a.

Exercice 259) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et t_b.

Exercice 260) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et t_c.

Exercice 261) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_a et R.

Exercice 262) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et R.

Exercice 263) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_a et r.

Exercice 264) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et r.

Exercice 265) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_a et r_a.

Exercice 266) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_a et r_b.

Exercice 267) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et r_a.

Exercice 268) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et r_b.

Exercice 269) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, s_b et r_c.

Exercice 270) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_a et t_b.

Exercice 271) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_b et t_c.

Exercice 272) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_a et R.

Exercice 273) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_b et R.

Exercice 274) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_a et r.

Exercice 275) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_b et r.

Exercice 276) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_a et r_a.

Exercice 277) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_a et r_b.

Exercice 278) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_b et r_a.

Exercice 279) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_b et r_b.

Exercice 280) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, t_b et r_c.

Exercice 281) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, R et r.

Exercice 282) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, R et r_a.

Exercice 283) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, R et r_b.

Exercice 284) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, r et r_a.

Exercice 285) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, r et r_b.

Exercice 286) △ un triangle **ABC** dont on connaît h_a, r_a et r_b.

Exercice 287) un triangle **ABC** dont on connaît h_a, r_b et r_c.

Exercice 288) △ un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et m_c.

Exercice 289) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et s_a.

Exercice 290) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et s_c.

Exercice 291) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et t_a.

Exercice 292) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et t_c.

Exercice 293) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et R.

Exercice 294) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et r.

Exercice 295) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et r_a.

Exercice 296) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, m_b et r_c.

Exercice 297) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et s_b.

Exercice 298) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et s_c.

Exercice 299) △ un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et t_a.

Exercice 300) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et t_b.

Exercice 301) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et t_a.

Exercice 302) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et t_b.

Exercice 303) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et t_c.

Exercice 304) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et R.

Exercice 305) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et R.

Exercice 306) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et r.

Exercice 307) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et r.

Exercice 308) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et r_a.

Exercice 309) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_a et r_b.

Exercice 310) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et r_a.

Exercice 311) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et r_b.

Exercice 312) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, s_b et r_c.

Exercice 313) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, t_a et t_b.

Exercice 314) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, t_b et t_c.

Exercice 315) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, t_a et R.

Exercice 316) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, t_b et R.

Exercice 317) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, t_a et r.

Exercice 318) un triangle **ABC** dont on connaît m_a, t_b et r.

Exercice 319) un triangle ABC dont on connaît m_a, t_a et r_a.

Exercice 320) un triangle ABC dont on connaît m_a, t_a et r_b.

Exercice 321) un triangle ABC dont on connaît m_a, t_b et r_a.

Exercice 322) un triangle ABC dont on connaît m_a, t_b et r_b.

Exercice 323) un triangle ABC dont on connaît m_a, t_b et r_c.

Exercice 324) un triangle ABC dont on connaît m_a, R et r.

Exercice 325) un triangle ABC dont on connaît m_a, R et r_a.

Exercice 326) un triangle ABC dont on connaît m_a, R et r_b.

Exercice 327) △ un triangle ABC dont on connaît m_a, r et r_a.

Exercice 328) un triangle ABC dont on connaît m_a, r et r_b.

Exercice 329) un triangle ABC dont on connaît m_a, r_a et r_b.

Exercice 330) △ un triangle ABC dont on connaît m_a, r_b et r_c.

Exercice 331) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et s_c.

Exercice 332) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et t_a.

Exercice 333) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et t_c.

Exercice 334) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et R.

Exercice 335) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et r.

Exercice 336) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et r_a.

Exercice 337) un triangle ABC dont on connaît s_a, s_b et r_c.

Exercice 338) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_a et t_b.

Exercice 339) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_b et t_c.

Exercice 340) △ un triangle ABC dont on connaît s_a, t_a et R.

Exercice 341) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_b et R.

Exercice 342) △ un triangle ABC dont on connaît s_a, t_a et r.

Exercice 343) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_b et r.

Exercice 344) △ un triangle ABC dont on connaît s_a, t_a et r_a.

Exercice 345) △ un triangle ABC dont on connaît s_a, t_a et r_b.

Exercice 346) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_b et r_a.

Exercice 347) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_b et r_b.

Exercice 348) un triangle ABC dont on connaît s_a, t_b et r_c.

Exercice 349) un triangle ABC dont on connaît s_a, R et r.

Exercice 350) un triangle ABC dont on connaît s_a, R et r_a.

Exercice 351) un triangle ABC dont on connaît s_a, R et r_b.

Exercice 352) △ un triangle ABC dont on connaît s_a, r et r_a.

Exercice 353) un triangle ABC dont on connaît s_a, r et r_b.

Exercice 354) un triangle ABC dont on connaît s_a, r_a et r_b.

Exercice 355) △ un triangle ABC dont on connaît s_a, r_b et r_c.

Exercice 356) un triangle ABC dont on connaît t_a, t_b et t_c.

Exercice 357) un triangle ABC dont on connaît t_a, t_b et R.

Exercice 358) un triangle ABC dont on connaît t_a, t_b et r.

Exercice 359) un triangle ABC dont on connaît t_a, t_b et r_a.

Exercice 360) un triangle ABC dont on connaît t_a, t_b et r_c.

Exercice 361) un triangle ABC dont on connaît t_a, R et r.

Exercice 362) un triangle ABC dont on connaît t_a, R et r_a.

Exercice 363) un triangle ABC dont on connaît t_a, R et r_b.

Exercice 364) △ un triangle ABC dont on connaît t_a, r et r_a.

Exercice 365) un triangle ABC dont on connaît t_a, r et r_b.

Exercice 366) un triangle ABC dont on connaît t_a, r_a et r_b.

Exercice 367) △ un triangle ABC dont on connaît t_a, r_b et r_c.

Exercice 368) △ un triangle ABC dont on connaît R, r et r_a.

Exercice 369) △ un triangle ABC dont on connaît R, r_a et r_b.

Exercice 370) △ un triangle ABC dont on connaît r, r_a et r_b.

Exercice 371) △ un triangle ABC dont on connaît r_a, r_b et r_c.

CHAPITRE III

SOLUTIONS

Exercice 1)

Définition: ***trois éléments d'un triangle forment un*** datum ***si, étant donné deux de ces éléments, le troisième est déterminé.***

Nous savons que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Alors, si nous connaissons deux angles, le troisième (i.e., sa valeur) est déterminé. Donc nous pouvons dire que α, β et γ forment un datum.

Les problèmes dont les éléments forment un datum seront impossibles (i.e., aucune solution) ou indéterminés (i.e., un nombre illimité de solutions). Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 180°$, le problème est impossible; si $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, nous pouvons construire un nombre illimité de triangles et le problème est indéterminé.

Nous aurons l'occasion de voir d'autres problèmes où les éléments forment un datum.

Exercice 2)

Premier procédé

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la *forme* ($\triangle$ A'BC') du triangle cherché (voir figure 1).

Maintenant nous voulons que $\overline{\mathbf{BC}} = a$. Sur la droite r nous marquons le point **C** tel que $\overline{\mathbf{BC}} = a$ et à partir du point **C** nous obtenons facilement le point **A** ($\mathbf{A} \in t \cap s$).

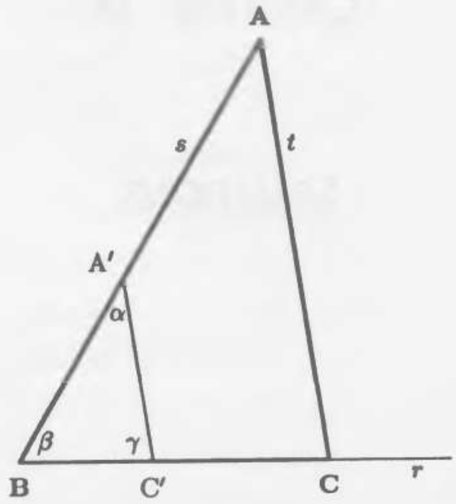


Figure 1

Comme $\triangle A'BC' \sim \triangle ABC$, nous dirons que cette façon de procéder fait appel à la *méthode des figures semblables.* Tous les problèmes de construction de triangle où deux angles sont connus peuvent être résolus avec cette méthode.

Deuxième procédé

La figure 1 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) il appartient à la droite s;

ii) un observateur placé en **A** voit le segment **BC** selon un angle α (**A** appartient à l'arc capable—ϕ—de l'angle α sur le segment **BC**).

D'où la construction qui suit (voir figure 2):

i) sur une droite r quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ;

iii) construire s et $\mathbf{A} \in s \cap \phi$.

Avec ce procédé nous avons pu déterminer un point—le point **A**—qui satisfait à deux conditions bien précises, i.e. $\mathbf{A} \in s$ et $\mathbf{A} \in \phi$ ou $\mathbf{A} \in s \cap \phi$. Cette façon de procéder fait appel à la *méthode de la détermination d'un point à partir de l'intersection de deux de ses lieux géométriques.* Nous verrons que plusieurs problèmes de construction de triangle auront leur solution basée sur cette méthode.

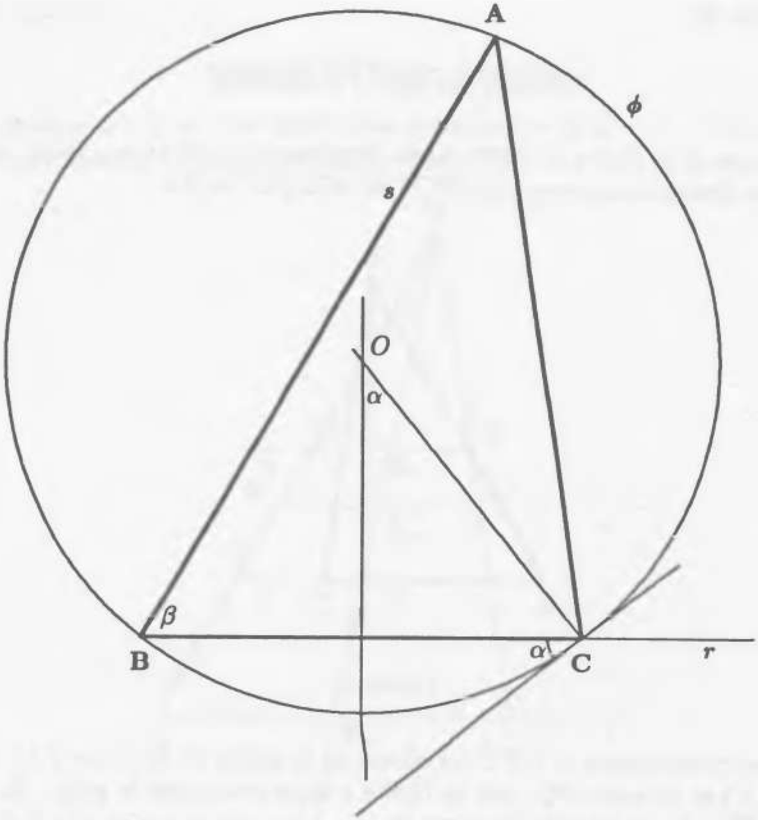


Figure 2

Discussion: le problème est toujours possible[§] et possède une solution seulement.

Exercice 3)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons construire $\triangle$ A′BC′ (voir figure 1). Sur la droite s nous marquons le point **A** tel que $\overline{\mathbf{BA}} = c$ et à partir du point **A** nous obtenons facilement le point **C** ($\mathbf{C} \in t \cap r$).

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

---

§ Nous supposerons toujours que $\alpha + \beta < 180°$.

Exercice 4)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ AB′C′) du triangle cherché.

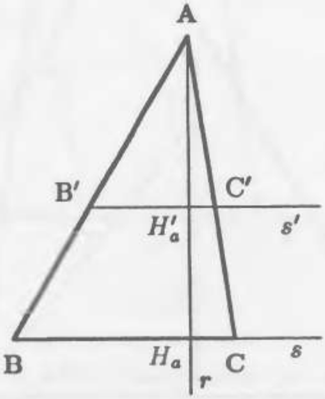


Figure 3

Nous construisons $\triangle$ AB′C′ et obtenons la droite s', la droite r ($\mathbf{A} \in r$ et $r \perp s'$) et le point H'_a. Sur la droite r nous marquons le point H_a tel que $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et à partir du point H_a nous traçons la droite s ($s \parallel s'$) et obtenons facilement les points **B** et **C**.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 5)

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous obtenons l'angle γ et le problème est équivalent à l'exercice antérieur que nous savons déjà comment résoudre. Cette façon de procéder (transformer le problème original pour le mettre sous la forme d'un problème que nous savons résoudre) fait appel à la *méthode de transformation du problème pour le mettre sous la forme d'un problème déjà résolu*. Nous verrons que plusieurs problèmes de construction de triangle auront leur solution basée sur cette méthode.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 6)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ AB′C′) du triangle cherché.

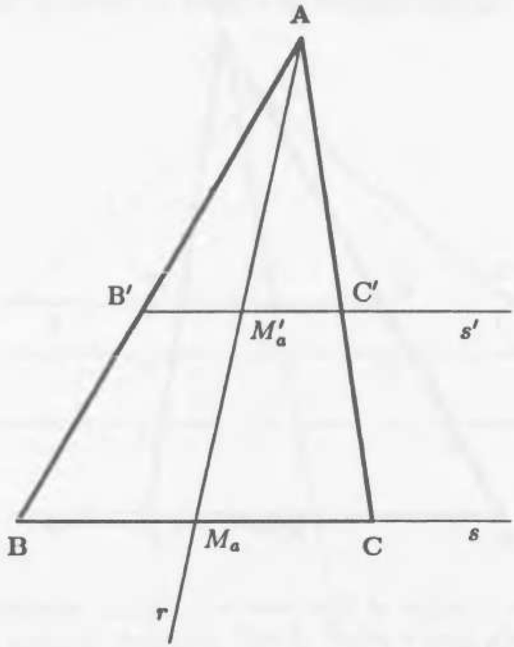


Figure 4

Nous construisons $\triangle$ AB′C′ et obtenons la droite s' et le point M'_a. Sur la droite r (définie par les deux points A et M'_a) nous marquons le point M_a tel que $\overline{AM_a} = m_a$ et à partir du point M_a nous traçons la droite s ($s \parallel s'$) et obtenons facilement les points B et C.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 7)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous obtenons l'angle γ et le problème est équivalent à l'exercice antérieur.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 8)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ AB′C′) du triangle cherché.

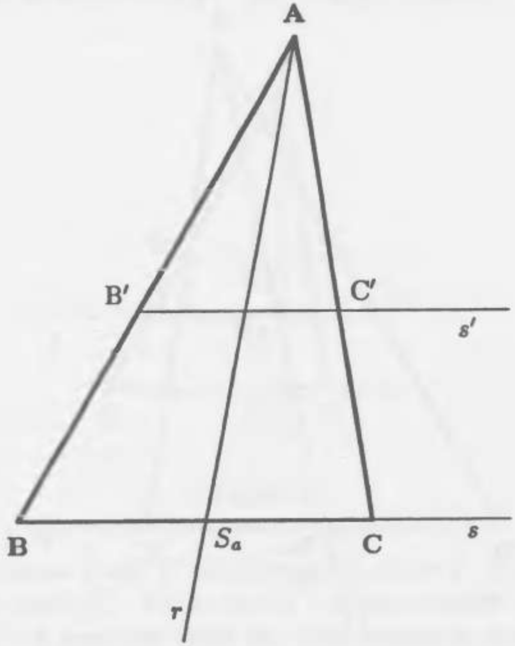


Figure 5

Nous construisons $\triangle$ AB′C′ et obtenons la droite s' et la bissectrice intérieure de l'angle α (droite r). Sur la droite r nous marquons le point S_a tel que $\overline{AS_a} = s_a$ et à partir du point S_a nous traçons la droite s ($s \parallel s'$) et obtenons facilement les points **B** et **C**.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 9)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous obtenons l'angle γ et le problème est équivalent à l'exercice antérieur.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 10)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ AB′C′) du triangle cherché.

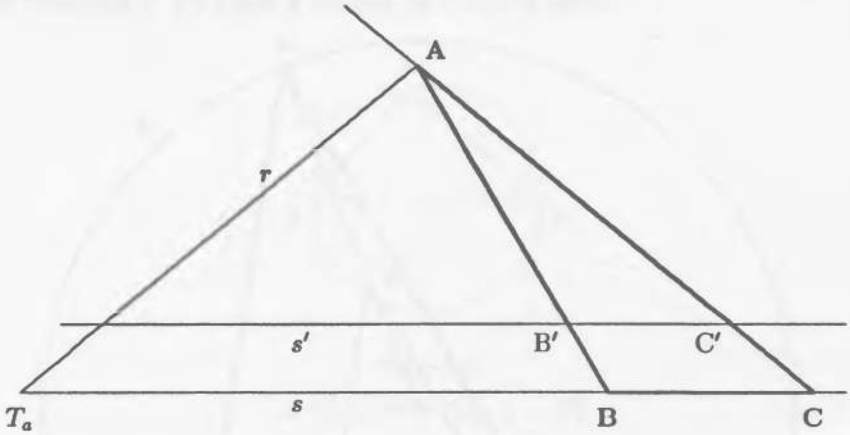


Figure 6

Nous construisons $\triangle$ AB′C′ et obtenons la droite s' et la bissectrice extérieure de l'angle α (droite r). Sur la droite r nous marquons le point T_a tel que $\overline{AT_a} = t_a$ et à partir du point T_a nous traçons la droite s ($s \parallel s'$) et obtenons facilement les points B et C.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 11)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous obtenons l'angle γ et le problème est équivalent à l'exercice antérieur.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 12)

Premier procédé - Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ A′B′C′) du triangle cherché.

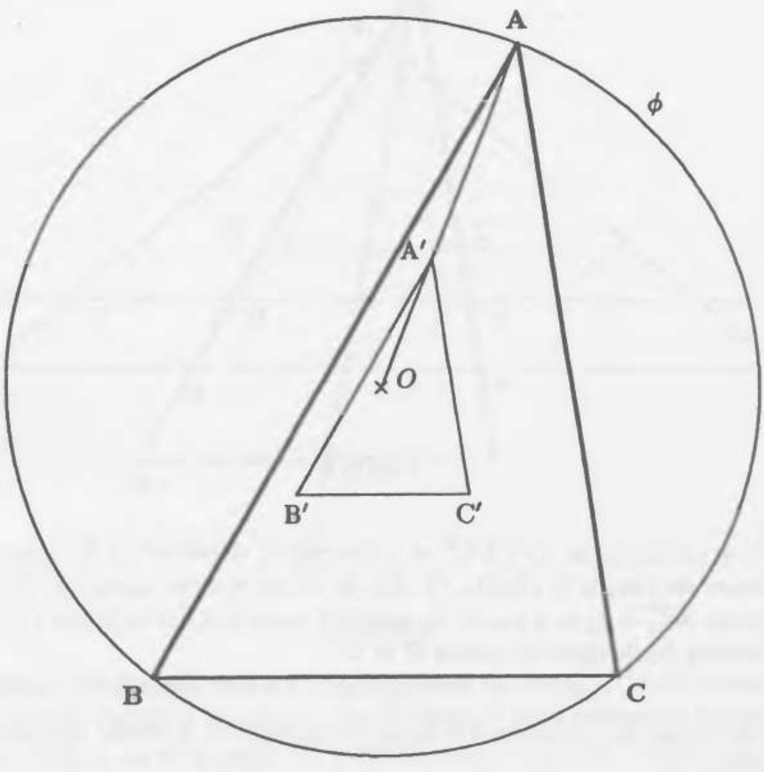


Figure 7

Nous construisons $\triangle$ A′B′C′ et le centre O du cercle circonscrit (le centre O se trouve à l'intersection de deux médiatrices quelconques des segments A′B′, A′C′ et B′C′). Sur la droite définie par les points O et A′ nous marquons le point **A** tel que $\overline{O\mathrm{A}} = R$ et dessinons le cercle circonscrit ϕ avec centre O et rayon R. À partir du point **A**, nous traçons deux droites parallèles aux droites définies par les points A′ et B′ et par les points A′ et C′ et déterminons les points **B** et **C** sur le cercle ϕ. Ce faisant, nous avons effectué une opération appelée *transformation homothétique* du $\triangle$ A′B′C′ avec centre O et rapport $k = R/\overline{O\mathrm{A}'}$.

Deuxième procédé - Méthode du problème déjà résolu

Avec l'aide de la figure 2, nous constatons que $\frac{a}{2} = R\sin\alpha$ ou $a = 2R\sin\alpha$. Donc nous connaissons α, β et a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 2).

Observation: pour obtenir a, nous devons résoudre un problème du type de l'exercice 2. La figure 8 montre les étapes à suivre.

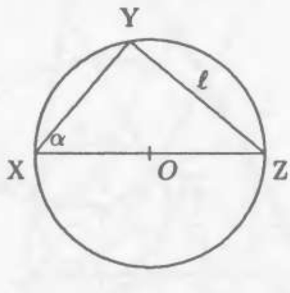


Figure 8

$$\ell = \overline{\mathrm{XZ}}\sin\alpha = R\sin\alpha = \overline{\mathrm{YZ}}$$

$$a = 2\ell = 2\overline{\mathrm{YZ}}$$

Remarquer que $\angle\mathrm{XYZ} = 90°$ et que l'arc capable de $90°$ sur un segment est la circonférence du cercle dont le diamètre est le segment.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 13)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ A'B'C') du triangle cherché.

Nous construisons $\triangle$ A'B'C' et le centre I du cercle inscrit ϕ' (le centre I se trouve à l'intersection de deux bissectrices quelconques des angles α, β et γ). Ensuite nous déterminons les points de contact (de tangence) T_1', T_2' et T_3' et dessinons le cercle inscrit ϕ' avec rayon r'.

Sur les droites définies par les points (I, T_1'), (I, T_2') et (I, T_3'), nous marquons $\overline{IT_1} = \overline{IT_2} = \overline{IT_3} = r$ et, à partir de T_1, T_2 et T_3, nous obtenons **A**, **B** et **C** (voir figure 9). $\triangle$ A'B'C' génère $\triangle$ **ABC** à partir d'une homothétie de centre I et rapport $k = r/\overline{IT_1'} = r/r'$.

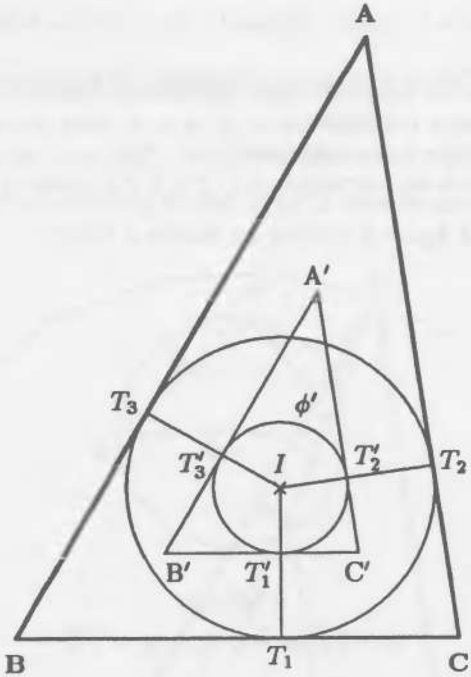


Figure 9

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 14)

Méthode des figures semblables

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous connaissons α, β et γ. Donc nous pouvons dessiner la forme ($\triangle$ A′B′C′) du triangle cherché.

Nous construisons $\triangle$ A′B′C′ et le centre I_a du cercle exinscrit ϕ'_a (le centre I_a se trouve à l'intersection de deux bissectrices quelconques des angles α, $180° - \beta$ et $180° - \gamma$). Ensuite nous déterminons les points de contact (de tangence) T'_1, T'_2 et T'_3 et dessinons le cercle exinscrit ϕ'_a avec rayon r'_a.

Sur les droites définies par les points (I_a, T'_1), (I_a, T'_2) et (I_a, T'_3), nous marquons $\overline{I_aT_1} = \overline{I_aT_2} = \overline{I_aT_3} = r_a$ et, à partir de T_1, T_2 et T_3, nous obtenons **A, B** et **C** (voir figure 10). $\triangle$ A′B′C′ génère $\triangle$ **ABC** à partir d'une homothétie de centre I_a et rapport $k = r_a/\overline{IT'_1} = r_a/r'_a$.

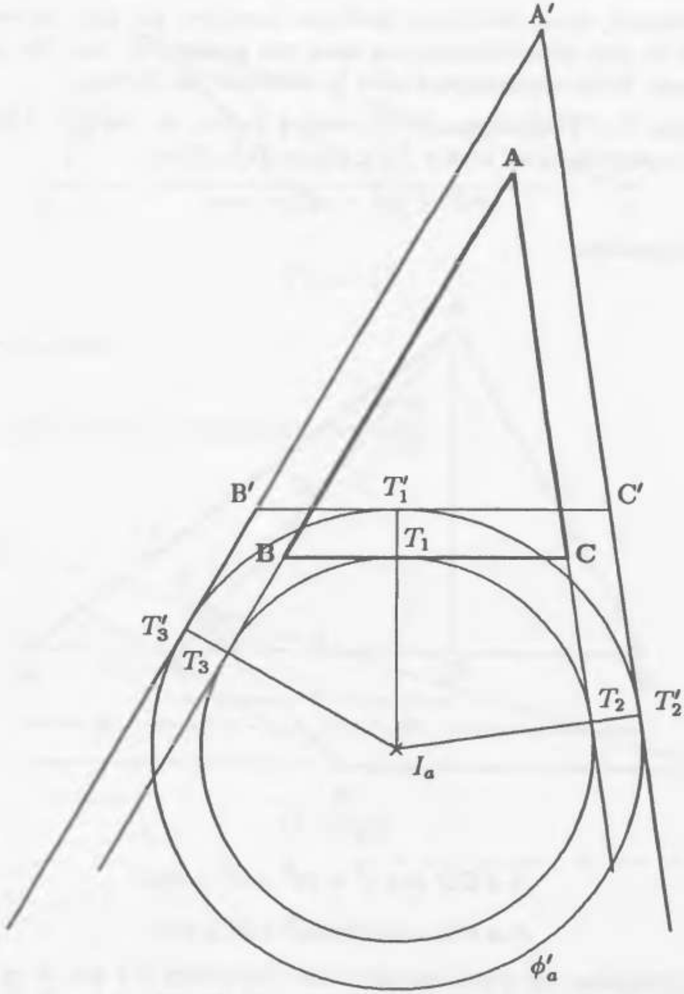


Figure 10

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Exercice 15)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, nous obtenons l'angle γ et le problème est équivalent à l'exercice antérieur.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

Maintenant, nous déduisons quelques formules qui nous seront utiles plus tard et qui, généralement, ne sont pas présentées dans les ouvrages didactiques. Nous commençons avec le théorème de Stewart.

Théorème 1: (Théorème de Stewart) *Soient un triangle* ABC *et un point D appartenant au côté a (voir figure 11). Alors*

$$mb^2 + nc^2 - ad^2 = mna. \tag{1}$$

Démonstration:

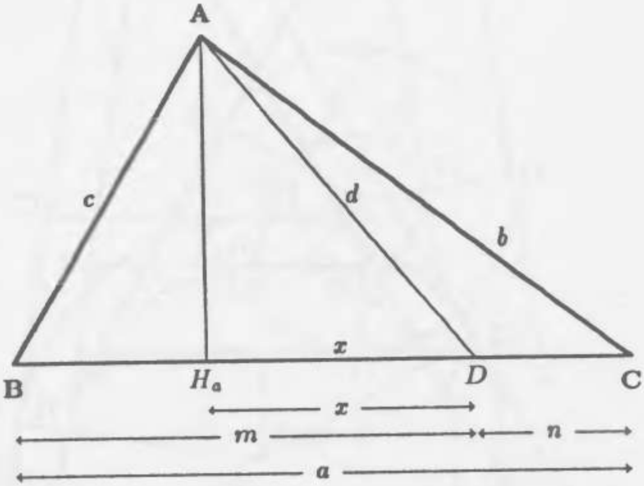


Figure 11

$$\triangle\, \mathrm{AB}D \Longrightarrow c^2 = m^2 + d^2 \mp 2mx \tag{*}$$

$$\triangle\, \mathrm{AC}D \Longrightarrow b^2 = n^2 + d^2 \pm 2nx \tag{**}$$

Nous multiplions les deux membres de l'équation (*) par n et ceux de l'équation (**) par m, obtenant équations (***) et (****).

$$nc^2 = nm^2 + nd^2 \mp 2mnx \tag{***}$$

$$mb^2 = mn^2 + md^2 \pm 2mnx \tag{****}$$

Additionnant (***) et (****) et notant que $m + n = a$, nous avons:

$$mb^2 + nc^2 - ad^2 = mna. \quad \blacksquare$$

Théorème 2: (Théorème des bissectrices) *Dans tout triangle (voir figure 12), les bissectrices intérieure et extérieure, issues d'un même sommet, divisent harmoniquement le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents, i.e.,*

$$\frac{\overline{S_a\mathrm{B}}}{\overline{S_a\mathrm{C}}} = \frac{\overline{T_a\mathrm{B}}}{\overline{T_a\mathrm{C}}} = \frac{c}{b}. \tag{2}$$

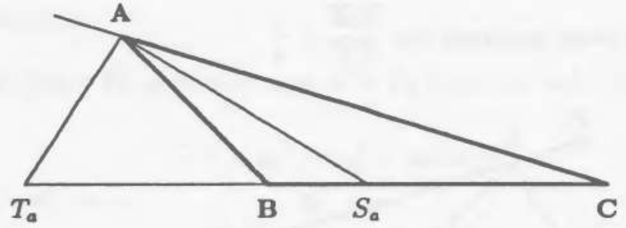


Figure 12

Démonstration:

Nous commençons en montrant que $\dfrac{\overline{S_a\mathbf{B}}}{\overline{S_a\mathbf{C}}} = \dfrac{c}{b}$.

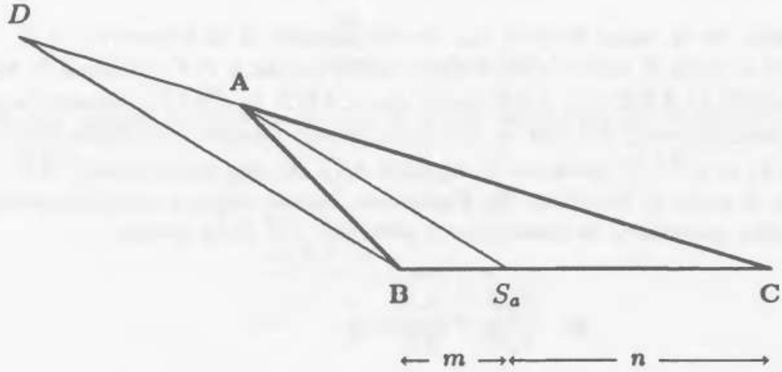


Figure 13

À partir de **B**, nous traçons une droite parallèle à la bissectrice $\mathbf{A}S_a$, obtenant le point D sur la droite définie par les points **A** et **C**. Puisque $\Delta\, \mathbf{AB}D$ est isocèle ($\angle\mathbf{AB}D = \angle\mathbf{A}D\mathbf{B}$ parce que $\angle\mathbf{AB}D = \angle\mathbf{BA}S_a$ (comme angles alternes-internes), $\angle\mathbf{A}D\mathbf{B} = \angle\mathbf{CA}S_a$ (comme angles correspondants) et $\angle\mathbf{BA}S_a = \angle\mathbf{CA}S_a$ (puisque le segment $\mathbf{A}S_a$ est une bissectrice)), $\overline{\mathbf{A}D} = c$. Donc, d'après le théorème de Thales[§] (en tenant compte implicitement de la droite parallèle à la bissectrice à partir de **C**), nous avons:

$$\frac{\overline{S_a\mathbf{B}}}{\overline{S_a\mathbf{C}}} = \frac{\overline{\mathbf{A}D}}{\overline{\mathbf{AC}}} = \frac{c}{b}.$$

[§] **Des droites parallèles découpent deux sécantes quelconques en segments proportionnels.**

Maintenant nous montrons que $\dfrac{\overline{T_a\mathbf{B}}}{\overline{T_a\mathbf{C}}} = \dfrac{c}{b}$.

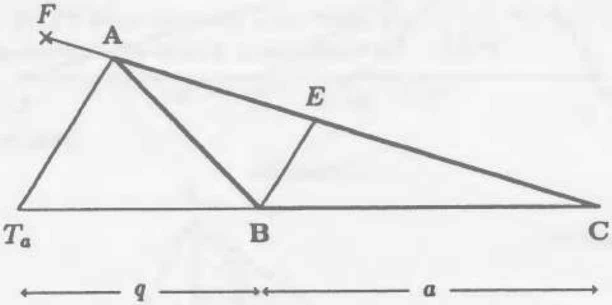


Figure 14

À partir de **B**, nous traçons une droite parallèle à la bissectrice $\mathbf{A}T_a$, obtenant le point E sur la droite définie par les points **A** et **C**. Puisque $\triangle\,\mathbf{AB}E$ est isocèle ($\angle\mathbf{AB}E = \angle\mathbf{A}E\mathbf{B}$ parce que $\angle\mathbf{AB}E = \angle\mathbf{BA}T_a$ (comme angles alternes-internes), $\angle\mathbf{A}E\mathbf{B} = \angle F\mathbf{A}T_a$ (comme angles correspondants) et $\angle\mathbf{BA}T_a = \angle F\mathbf{A}T_a$ (puisque le segment $\mathbf{A}T_a$ est une bissectrice)), $\overline{\mathbf{A}E} = c$. Donc, d'après le théorème de Thales (en tenant compte implicitement de la droite parallèle à la bissectrice à partir de **C**), nous avons:

$$\frac{\overline{T_a\mathbf{B}}}{\overline{T_a\mathbf{C}}} = \frac{\overline{\mathbf{A}E}}{\overline{\mathbf{AC}}} = \frac{c}{b}. \qquad \blacksquare$$

On dit que les points S_a et T_a sont *conjugués harmoniques* par rapport aux points **B** et **C**. De même, on peut dire que les points **B** et **C** sont conjugués harmoniques par rapport aux points S_a et T_a (on peut écrire aussi $\dfrac{\overline{\mathbf{B}S_a}}{\overline{\mathbf{B}T_a}} = \dfrac{\overline{\mathbf{C}S_a}}{\overline{\mathbf{C}T_a}}$).

Donc, si nous connaissons la position de trois points parmi les points T_a, **B**, S_a et **C**, la position du quatrième peut être déterminée. Nous verrons que plusieurs problèmes de construction de triangle seront résolus en utilisant le fait qu'un point forme avec trois autres une division harmonique.

Théorème 3: *Le produit de deux côtés d'un triangle (voir figure 13) est égal au produit des segments que la bissectrice intérieure de l'angle formé par ces côtés détermine sur le troisième côté plus le carré de cette bissectrice, i.e.,*

$$bc = mn + s_a^2. \tag{3}$$

Démonstration:

Dans la figure 11, si nous posons $D = S_a$ (i.e., $d = s_a$), l'équation (1) devient

$$mb^2 + nc^2 - as_a^2 = mna.$$

Ou, en divisant par a

$$\frac{mb^2}{a} + \frac{nc^2}{a} = mn + s_a^2. \tag{4}$$

Nous avons vu, au théorème 2, que

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{m+n}{b+c} = \frac{a}{b+c}$$
$$m = \frac{ac}{b+c}$$
$$n = \frac{ab}{b+c}.$$

Avec ces valeurs pour m et n, nous pouvons écrire l'équation (4) comme

$$\frac{cb^2}{b+c} + \frac{bc^2}{b+c} = mn + s_a^2$$
$$\frac{bc(b+c)}{b+c} = mn + s_a^2$$
$$bc = mn + s_a^2. \qquad \blacksquare$$

Théorème 4: *La longueur de la bissectrice intérieure qui part du sommet* A *du* $\triangle$ ABC *est donnée par*

$$s_a = \frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} \tag{5}$$

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \tag{6}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, i.e., $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Démonstration:

Nous savons, d'après le théorème 2, que $n = \frac{bm}{c}$. Si nous remplaçons cette valeur de n dans l'équation (3), nous obtenons

$$bc^2 = bm^2 + cs_a^2. \tag{7}$$

Mais $m^2 = c^2 + s_a^2 - 2cs_a \cos\alpha/2$, d'après le théorème des cosinus. Avec cette valeur pour m^2, nous pouvons écrire l'équation (7) comme

$$(b+c)s_a = 2bc\cos\alpha/2$$
$$s_a = \frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c}.$$

Pour prouver l'équation (6), nous écrivons l'équation (3) comme

$$s_a^2 = bc - mn. \tag{8}$$

Comme $m = \frac{ac}{b+c}$ et $n = \frac{ab}{b+c}$, $mn = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. L'équation (8) devient

$$s_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$
$$s_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$
$$s_a^2 = \frac{bc[(b+c+a)(b+c-a)]}{(b+c)^2}$$
$$s_a^2 = \frac{bc[2p(a+b+c-2a)]}{(b+c)^2}$$
$$s_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$
$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}. \qquad \blacksquare$$

Théorème 5: *La longueur de la bissectrice extérieure qui part du sommet* **A** *du* $\triangle$ **ABC** *est donnée par*

$$t_a = \frac{2bc\sin\alpha/2}{|b-c|} \tag{9}$$
$$t_a = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}. \tag{10}$$

Démonstration:

En prenant $\triangle ACT_a$ (voir figure 14), le théorème de Stewart nous dit que:

$$at_a^2 + qb^2 - (a+q)c^2 = aq(a+q). \tag{11}$$

D'après le théorème des bissectrices, nous avons:

$$\frac{q}{c} = \frac{a+q}{b} = \frac{a}{b-c}$$
$$q = \frac{ac}{b-c}$$
$$a+q = \frac{ab}{b-c}$$

Si nous remplaçons ces valeurs de q et $a+q$ dans l'équation (11), nous obtenons:

$$at_a^2 + \frac{ab^2c}{b-c} - \frac{abc^2}{b-c} = \frac{a^2c}{b-c}\frac{ab}{b-c}$$
$$t_a^2 = \frac{a^2bc}{(b-c)^2} - bc \quad (\text{ou } \ bc = (a+q)q - t_a^2)$$
$$t_a^2 = \frac{bc}{(b-c)^2}[a^2 - (b-c)^2]. \tag{12}$$

Puisque $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha)$, nous pouvons écrire l'équation (12) comme

$$t_a^2 = \frac{2b^2c^2}{(b-c)^2}(1-\cos\alpha).$$

Mais $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Alors,

$$t_a^2 = \frac{4b^2c^2\sin^2\alpha/2}{(b-c)^2}$$
$$t_a = \frac{2bc\sin\alpha/2}{|b-c|}.$$

Pour prouver l'équation (10), nous écrivons l'équation (12) comme

$$t_a^2 = \frac{bc}{(b-c)^2}[(a+b-c)(a-b+c)]$$
$$t_a^2 = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}$$
$$t_a = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}. \quad \blacksquare$$

Observation: si $b = c$, la bissectrice extérieure qui part du sommet **A** du $\triangle$ **ABC** et la droite qui contient les points **B** et **C** sont parallèles et, dans ce cas, la longueur de la bissectrice extérieure n'est pas définie ($t_a = \infty$).

Maintenant, nous présentons quelques formules concernant le rayon r du cercle inscrit et les rayons r_a, r_b et r_c des cercles exinscrits (voir figure 15).

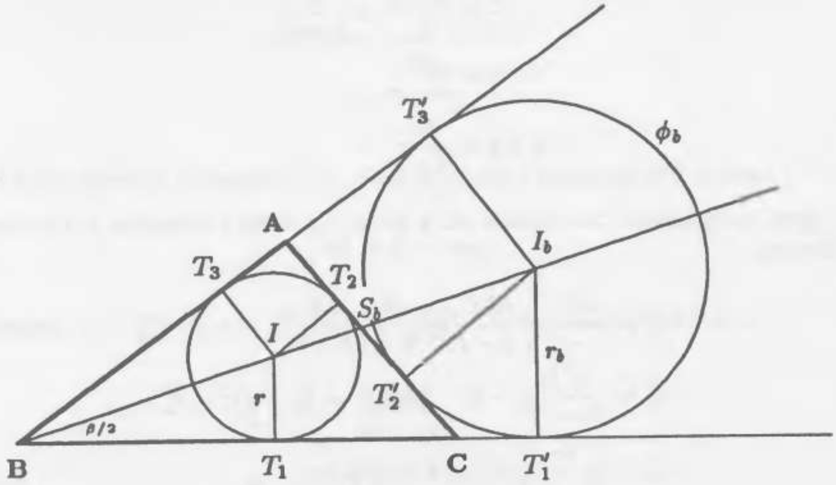


Figure 15

Comme les deux tangentes à un cercle menées d'un même point ont la même longueur, nous avons, pour le cercle inscrit:

$$\overline{\mathbf{A}T_2} = \overline{\mathbf{A}T_3}; \qquad \overline{\mathbf{B}T_1} = \overline{\mathbf{B}T_3}; \qquad \overline{\mathbf{C}T_1} = \overline{\mathbf{C}T_2}.$$

Par conséquent,

$$a + b + c = 2p = 2(\overline{\mathbf{A}T_2} + \overline{\mathbf{B}T_1} + \overline{\mathbf{C}T_1}),$$

ou

$$\overline{\mathbf{A}T_2} = p - (\overline{\mathbf{B}T_1} + \overline{\mathbf{C}T_1}) = p - a$$

$$\overline{\mathbf{B}T_1} = p - (\overline{\mathbf{A}T_2} + \overline{\mathbf{C}T_2}) = p - b$$

$$\overline{\mathbf{C}T_1} = p - (\overline{\mathbf{A}T_3} + \overline{\mathbf{B}T_3}) = p - c$$

et

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{IT_2}}{\overline{\mathbf{A}T_2}} = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{b+c-a} \tag{13}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{IT_1}}{\overline{\mathbf{B}T_1}} = \frac{r}{p-b} = \frac{2r}{a+c-b}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{IT_1}}{\overline{\mathbf{C}T_1}} = \frac{r}{p-c} = \frac{2r}{a+b-c}.$$

Pour le cercle exinscrit ϕ_b, nous avons:

$$\overline{\mathbf{A}T_2'} = \overline{\mathbf{A}T_3'}; \qquad \overline{\mathbf{B}T_1'} = \overline{\mathbf{B}T_3'}; \qquad \overline{\mathbf{C}T_1'} = \overline{\mathbf{C}T_2'}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}2\overline{\mathbf{B}T_1'} = \overline{\mathbf{B}T_1'} + \overline{\mathbf{B}T_3'} &= (\overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{C}T_1'}) + (\overline{\mathbf{BA}} + \overline{\mathbf{A}T_3'}) = \\ &= \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}} + (\overline{\mathbf{C}T_2'} + \overline{\mathbf{A}T_2'}) = \\ &= \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{AC}} = 2p.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overline{\mathbf{B}T_1'} = \overline{\mathbf{B}T_3'} = p$$

$$\overline{\mathbf{A}T_3'} = \overline{\mathbf{B}T_3'} - c = p - c$$

$$\overline{\mathbf{C}T_1'} = \overline{\mathbf{B}T_1'} - a = p - a$$

et

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{I_bT_1'}}{\overline{\mathbf{B}T_1'}} = \frac{r_b}{p} = \frac{2r_b}{a+b+c}. \tag{14}$$

De façon analogue, nous montrons que

$$\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{2r_a}{a+b+c} \\ \tan\frac{\gamma}{2} &= \frac{2r_c}{a+b+c}.\end{aligned} \tag{15}$$

Théorème 6: *Si S représente l'aire du $\triangle$ **ABC**, alors,*

$$S = pr$$

$$S = (p-b)r_b.$$

Démonstration:

Nous commençons en montrant que $S = pr$. Nous représentons l'aire du $\triangle XYZ$ par $S(XYZ)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}S(\mathbf{ABC}) = S &= S(\mathbf{AB}I) + S(\mathbf{BC}I) + S(\mathbf{AC}I) \\ S &= \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = pr.\end{aligned} \tag{16}$$

Pour montrer que $S = (p-b)r_b$, nous écrivons

$$\begin{aligned}S(\mathbf{ABC}) = S &= S(\mathbf{AB}I_b) + S(\mathbf{BC}I_b) - S(\mathbf{AC}I_b) \\ S &= \frac{cr_b}{2} + \frac{ar_b}{2} - \frac{br_b}{2} = \frac{(a+c-b)r_b}{2} = (p-b)r_b. \quad \blacksquare\end{aligned} \tag{17}$$

De façon analogue, nous montrons que

$$S = (p-a)r_a \tag{18}$$

$$S = (p-c)r_c. \tag{19}$$

À partir du théorème 6, nous déduisons les formules suivantes:

a) $rr_ar_br_c = S^2$.

Démonstration:

Nous commençons en montrant que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formule de Héron). Si, dans la figure 11, $D = H_a$, (i.e., $d = h_a$), nous avons:

$$\left.\begin{array}{l} a = m+n \\ m^2 = c^2 - h_a^2 \therefore m = \sqrt{c^2 - h_a^2} \\ n^2 = b^2 - h_a^2 \Longrightarrow (a-m)^2 = b^2 - h_a^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = 2a\sqrt{c^2 - h_a^2}$$

$$c^2 - h_a^2 = \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$$

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]$$

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}[(a+c+b)(a+c-b)][(b+a-c)(b-a+c)]$$

$$h_a^2 = \frac{2p(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Comme $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Nous avons vu que

$$r = \frac{S}{p},\ r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b} \text{ et } r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Donc,

$$rr_ar_br_c = \frac{S}{p}\frac{S}{p-a}\frac{S}{p-b}\frac{S}{p-c} = \frac{S^4}{S^2} = S^2. \qquad \blacksquare$$

b) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}.$

Démonstration:

$$S = (p-i)r_i,\ i = a,b,c.\ \text{Donc, } \frac{1}{r_i} = \frac{p-i}{S},\ i = a,b,c.$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} =$$

$$= \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}. \quad \blacksquare \tag{20}$$

c) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}.$

Démonstration:

Nous pouvons écrire $2S = ah_a = bh_b = ch_c = 2pr$. Donc,

$$\frac{a}{r} = \frac{2p}{h_a}; \qquad \frac{b}{r} = \frac{2p}{h_b}; \qquad \frac{c}{r} = \frac{2p}{h_c}.$$

$$\frac{1}{r}(a+b+c) = 2p\Big(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\Big)$$

Comme $2p = a+b+c$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}. \quad \blacksquare \tag{21}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Les prochaines formules, concernant le rayon R du cercle circonscrit, ne seront pas utilisées dans les problèmes qui suivront. Nous les présentons ici pour rendre notre travail plus complet et aussi parce qu'elles ne sont pas toujours démontrées dans les ouvrages didactiques. Nous commençons avec un résultat classique:

Théorème 7: *Si S représente l'aire du $\triangle$ ABC, alors,*

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Démonstration:

Dans la figure 7 (exercice 12), nous construisons $\Delta\, \mathbf{A}\mathbf{C}D$ avec $\overline{\mathbf{A}D} = 2R$ ($\overline{\mathbf{A}D}$ est un diamètre). Nous avons $\Delta\, \mathbf{A}H_a\mathbf{B} \sim \Delta\, \mathbf{A}\mathbf{C}D$ parce que

$$\angle \mathbf{A}H_a\mathbf{B} = \angle \mathbf{A}\mathbf{C}D = 90^\circ$$

et

$$\angle \mathbf{A}\mathbf{B}H_a = \angle \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{C} = \frac{\overset{\frown}{\mathbf{AC}}}{2}.$$

Nous pouvons écrire

$$\frac{h_a}{b} = \frac{c}{2R} \Longrightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{abc}{4R}. \qquad \blacksquare$$

À partir du théorème 7, nous pouvons déduire deux autres formules qui ont rapport avec les rayons r, r_a, r_b et r_c.

d) $\quad r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

Démonstration:

Nous avons vu que $S = pr$ et $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$ (formule (13)). Donc,

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

De façon analogue, nous montrons que

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

et

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Alors,

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{S}{p^2} = \frac{r}{p}.$$

Nous savons que $S = \frac{1}{2}ch_c$. Donc,

$$S = \frac{1}{2}c(b\sin\alpha) = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = bc\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{S}{\tan\frac{\alpha}{2}} = p(p-a)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

De façon analogue, nous montrons que

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Alors,

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{pS}{abc} = \frac{p}{4R}.$$

Comme $\sin\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, nous pouvons écrire:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{r}{p}\cdot\frac{p}{4R} = \frac{r}{4R}. \qquad \blacksquare$$

e) $4R = r_a + r_b + r_c - r$.

Démonstration:

Nous commençons en montrant que §

$$abc = p(p-b)(p-c) + p(p-c)(p-a) + p(p-a)(p-b) + \\ - (p-a)(p-b)(p-c).$$

$$p(p-b)(p-c) + p(p-c)(p-a) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c) =$$

$$= p(p-c)[2p-(a+b)] + (p-a)(p-b)[p-(p-c)] = p(p-c)c + (p-a)(p-b)c =$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\frac{a+b-c}{2} + \frac{b+c-a}{2}\frac{a+c-b}{2}\right)c = abc$$

$$4RS = abc$$

$$4RS = p(p-b)(p-c) + p(p-c)(p-a) + p(p-a)(p-b) + \\ - (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$4RS = \frac{S^2}{p-a} + \frac{S^2}{p-b} + \frac{S^2}{p-c} - \frac{S^2}{p}$$

$$4RS = S\left(\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p}\right)$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r. \qquad \blacksquare$$

---

§ Pour une preuve strictement géométrique, voir page 127.

Exercice 16)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 16 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) $\overline{\mathbf{CA}} = b$;

ii) un observateur placé en **A** voit le segment **BC** selon un angle α (**A** appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle α sur le segment **BC**).

D'où la construction qui suit (voir figure 16):

i) sur une droite r quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point **C**, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{A} \in \phi_1 \cap \phi_2$.

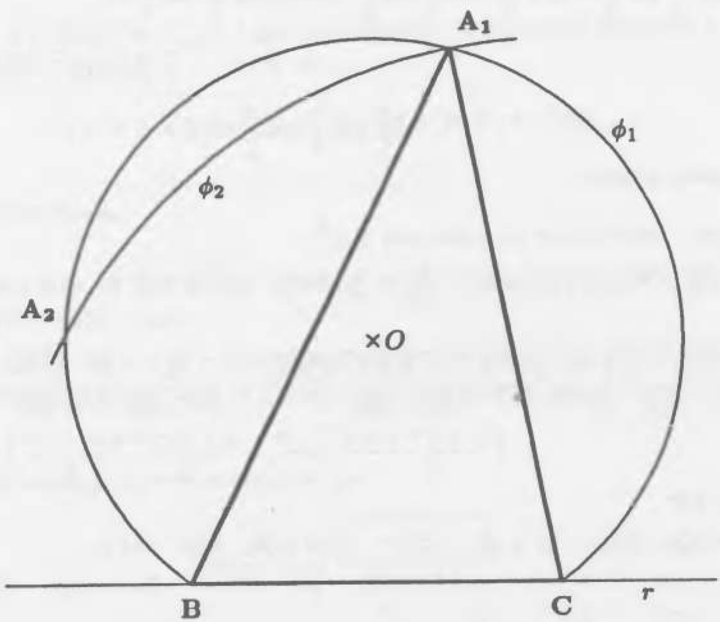


Figure 16

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

Exercice 17)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Construire l'angle α de sommet A (voir figure 17); porter $\overline{AB} = c$ sur le côté "gauche" de l'angle (droite r); porter $\overline{AC} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite s).

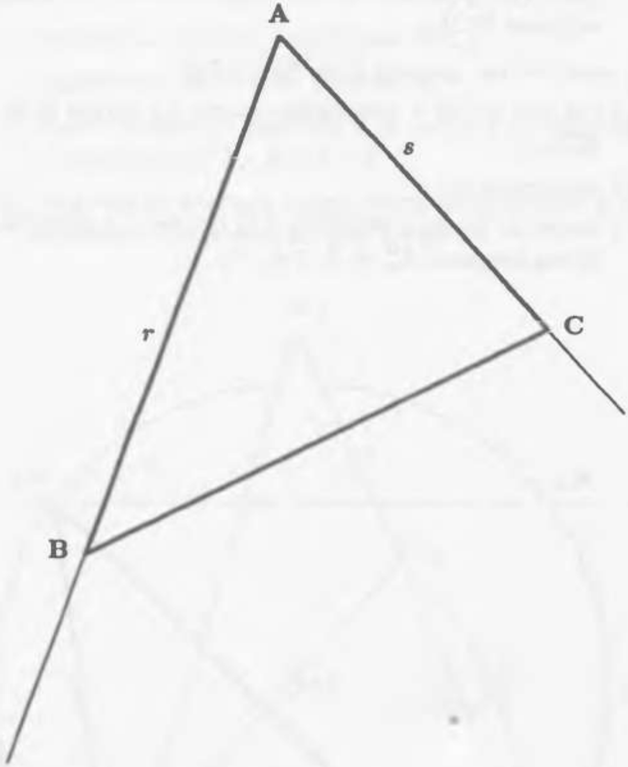


Figure 17

Discussion: le problème est toujours possible ($0° < \alpha < 180°$) et possède une solution seulement.

Exercice 18)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 18 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) la distance entre le point **A** et la droite r vaut h_a;

ii) un observateur placé en **A** voit le segment **BC** selon un angle α (**A** appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle α sur le segment **BC**).

D'où la construction qui suit (voir figure 18):

i) sur une droite r quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a et $\mathbf{A} \in \phi_1 \cap s$.

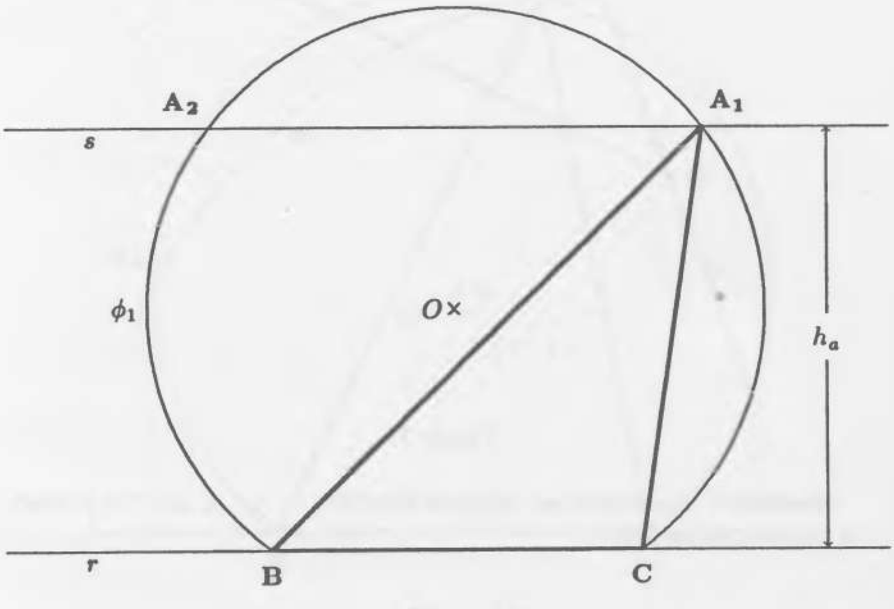


Figure 18

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que les triangles $\mathbf{A_1BC}$ et $\mathbf{A_2BC}$ sont congruents, i.e., $\triangle\, \mathbf{A_1BC} \cong \triangle\, \mathbf{A_2BC}$ et dans ce cas nous n'avons qu'une seule solution).

Exercice 19)

Premier procédé - Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 19.1 nous montre que le point **B** possède deux propriétés:

i) **B** appartient à la droite r;

ii) la distance entre le point **B** et la droite s vaut h_b.

D'où la construction qui suit (voir figure 19.1):

i) construire l'angle α de sommet **A**;

ii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur h_b: $\mathbf{B} \in r \cap t$;

iii) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à a, construire un arc de cercle (ϕ_1) et $\mathbf{C} \in s \cap \phi_1$.

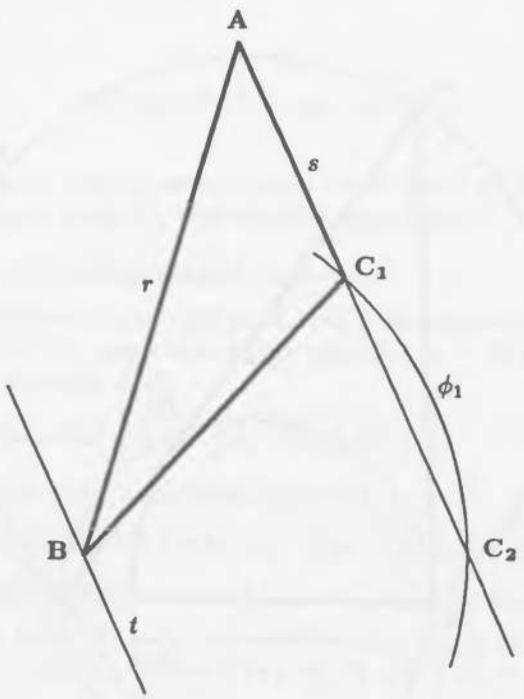


Figure 19.1

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC_1}$ et $\triangle\,\mathbf{ABC_2}$) solutions.

Deuxième procédé - Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle \mathrm{BC}H_b$. La figure 19.2 nous montre que le point H_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point **B** vaut h_b;

ii) un observateur placé en H_b voit le segment **BC** selon un angle droit (H_b appartient à l'arc capable—ϕ_2—de l'angle droit sur le segment **BC**).

D'où la construction qui suit (voir figure 19.2):

i) sur une droite r quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathrm{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_2;

iii) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à h_b, construire un arc de cercle (ϕ_3) et $H_b \in \phi_2 \cap \phi_3$.

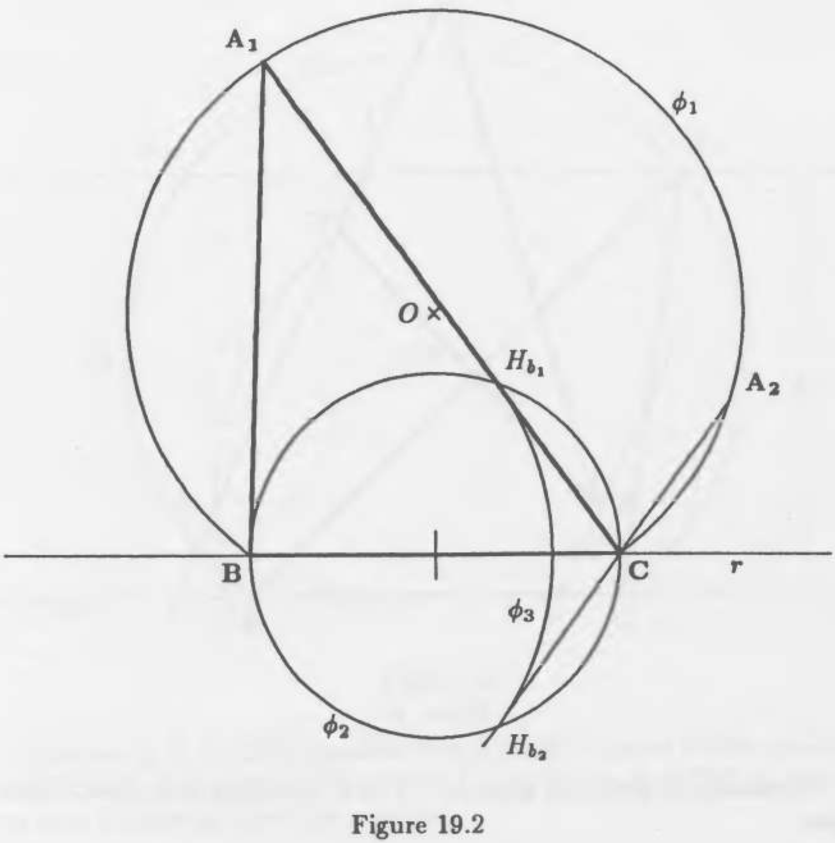


Figure 19.2

Le point $\mathbf{A_1}$ ($\mathbf{A_2}$) se trouve à l'intersection de ϕ_1 (l'arc capable de l'angle α sur le segment **BC**) avec la droite définie par les points **C** et H_{b_1} (H_{b_2}).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

Observation: noter que nous avons dû construire $\triangle\, \mathbf{BC}H_{b_1}$ ($\triangle\, \mathbf{BC}H_{b_2}$) avant d'obtenir $\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ ($\triangle\, \mathbf{A_2BC}$). Pour cette raison, nous dirons que cette façon de procéder fait appel à la *méthode de la figure auxiliaire*. Nous verrons que plusieurs problèmes de construction de triangle auront leur solution basée sur la construction d'une figure auxiliaire où un de ses points se trouve à l'intersection de deux lieux géométriques. Dans ces problèmes, la caractérisation d'une méthode de solution peut s'avérer discutable et le lecteur pourra ne pas être d'accord avec celle choisie par l'auteur.

Exercice 20)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, \mathbf{AC}H_a$. La figure 20 nous montre que le point H_a possède deux propriétés:

i) sa distance au point **A** vaut h_a;

ii) un observateur placé en H_a voit le segment **AC** selon un angle droit (H_a appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle droit sur le segment **AC**).

D'où la construction qui suit (voir figure 20):

i) construire l'angle α de sommet **A**;

ii) porter $\overline{\mathbf{AC}} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite s);

iii) construire ϕ_1;

iv) du point **A**, avec une ouverture de compas égale à h_a, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $H_a \in \phi_1 \cap \phi_2$.

Le point $\mathbf{B_1}$ ($\mathbf{B_2}$) se trouve à l'intersection de la droite r avec celle définie par les points **C** et H_{a_1} (H_{a_2}).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{AB_1C}$ et $\triangle\, \mathbf{AB_2C}$) solutions.

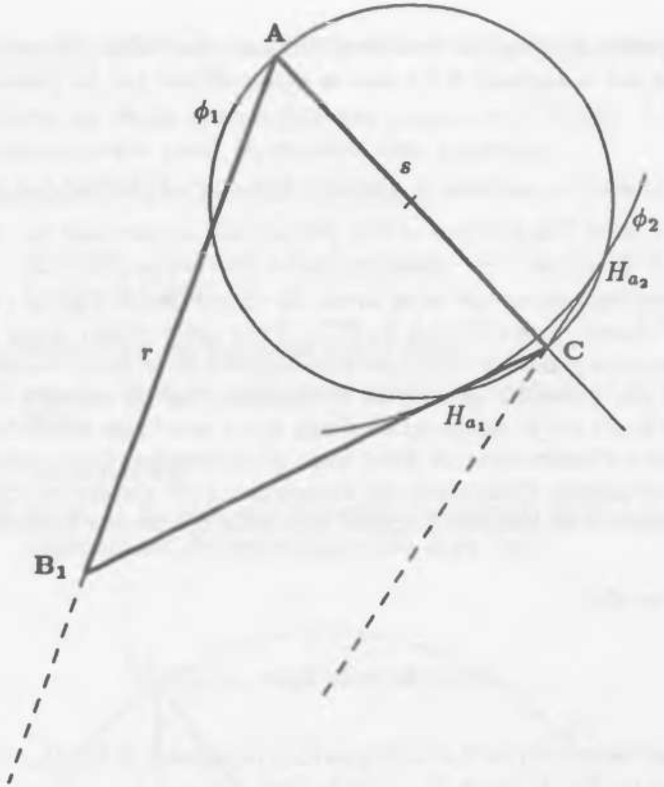


Figure 20

Exercice 21)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$ (voir figure 19.1), nous connaissons α, b et c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 17).

Pour obtenir c, nous construisons $\triangle\, \mathbf{AB}H_b$ (voir figure 21) où $\overline{\mathbf{B}H_b} = h_b$ et $\theta = 90° - \alpha$ (si $\alpha < 90°$; si $\alpha > 90°$, $\theta = \alpha - 90°$; si $\alpha = 90°$, $\theta = 0°$ et $\mathbf{A} \equiv H_b$).

Pour déterminer $\mathbf{C}$, nous marquons $\overline{\mathbf{AC}} = b$ sur la droite r définie par $H_b \in r$ et $r \perp s$.

Discussion: le problème est toujours possible et possède une solution seulement.

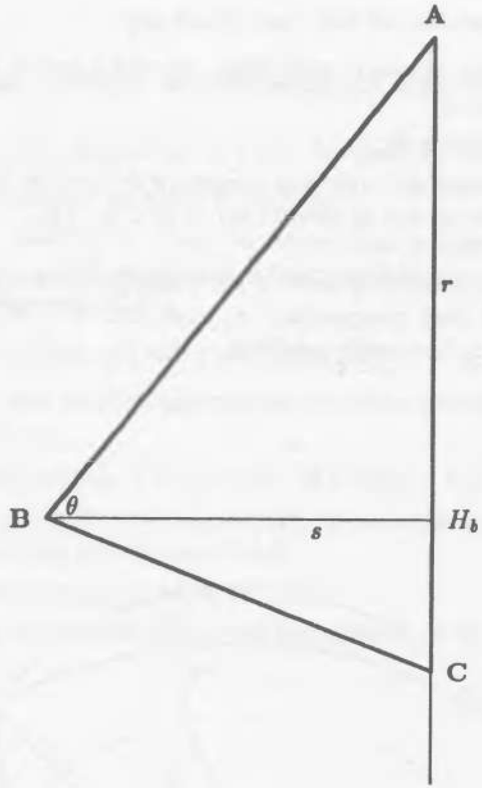


Figure 21

Exercice 22)

Datum

Comme $h_c = b \sin \alpha$, α, b et h_c forment un datum. Le problème est donc impossible ou indéterminé.

Exercice 23)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 22 nous montre que le point A possède deux propriétés:

i) sa distance au point M_a vaut m_a;

ii) un observateur placé en A voit le segment BC selon un angle α (A appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle α sur le segment BC).

D'où la construction qui suit (voir figure 22):

i) sur une droite r quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{A} \in \phi_1 \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que les triangles $\mathbf{A_1BC}$ et $\mathbf{A_2BC}$ sont congruents, i.e., $\triangle\,\mathbf{A_1BC} \cong \triangle\,\mathbf{A_2BC}$ et dans ce cas nous n'avons qu'une seule solution).

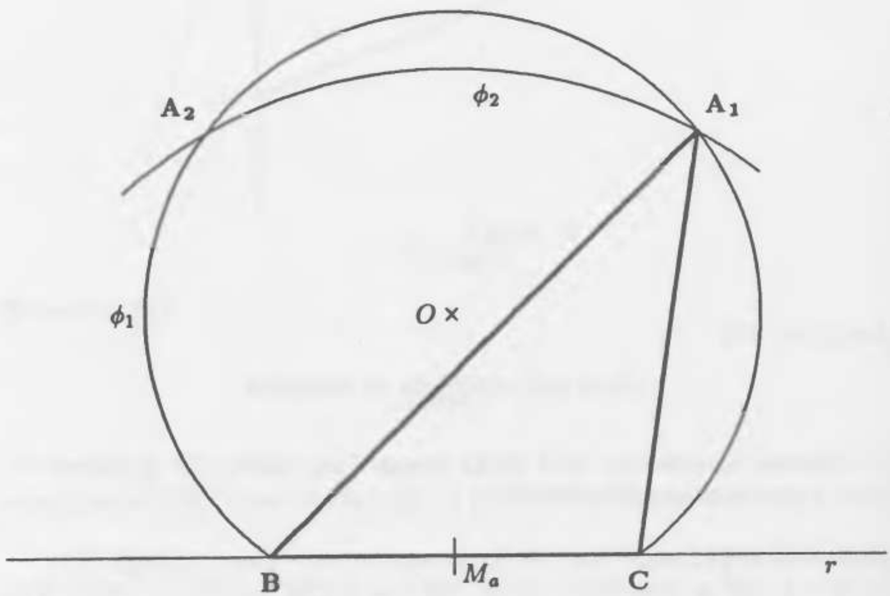


Figure 22

Exercice 24)

Premier procédé - Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 23 nous montre que le point M_b possède deux propriétés:

i) **sa distance au point B vaut m_b;**

ii) **un observateur placé en M_b voit le segment M_aC selon un angle α (M_b appartient à l'arc capable—ϕ_3—de l'angle α sur le segment M_aC).**

D'où la construction qui suit (voir figure 23):

i) **sur une droite r quelconque placer les points B et C tels que $\overline{BC} = a$;**

ii) **construire ϕ_1 (l'arc capable de l'angle α sur le segment BC);**

iii) **du point B, avec une ouverture de compas égale à m_b, construire un arc de cercle (ϕ_2);**

iv) **construire ϕ_3 et $M_b \in \phi_2 \cap \phi_3$;**

v) **si s est la droite définie par les points C et M_b, alors A $\in s \cap \phi_1$.**

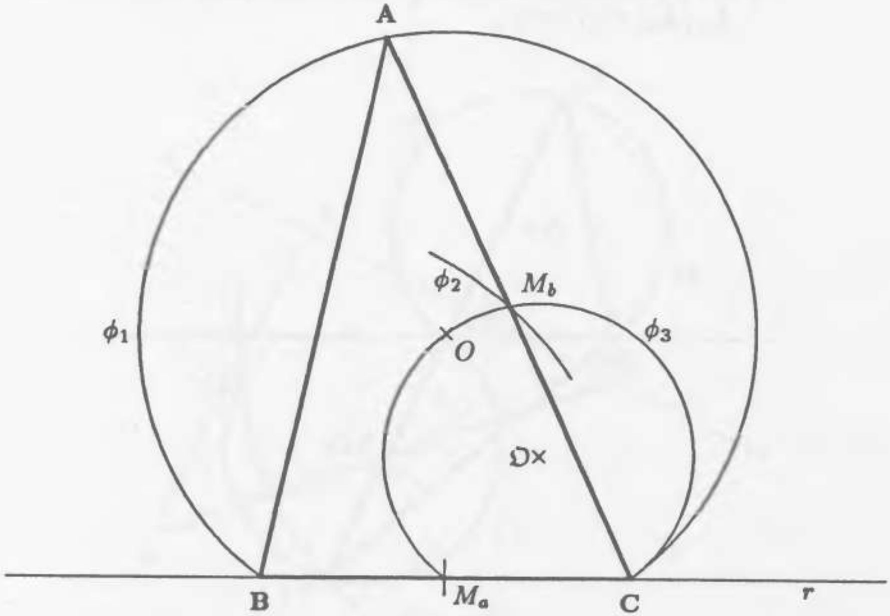


Figure 23

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle M_b\mathrm{BC}$. La figure 23 nous montre qu'un observateur placé en **A** voit le segment $\mathrm{B}M_b$ selon un angle α (**A** appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle α sur le segment $\mathrm{B}M_b$). En outre, nous savons que le point **C** est le symétrique du point **A** par rapport au point M_b. Donc, si ϕ_1' représente l'image de la symétrie de ϕ_1 par rapport au point M_b, nous avons deux propriétés pour le point **C**:

- i) sa distance au point **B** vaut a;
- ii) il appartient à ϕ_1'.

D'où la construction qui suit (voir figure 24):

- i) sur une droite r quelconque placer les points **B** et M_b tels que $\overline{\mathrm{B}M_b} = m_b$;
- ii) construire ϕ_1;
- iii) construire ϕ_1';
- iv) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à a, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathrm{C} \in \phi_1' \cap \phi_2$;
- v) si s (t) est la droite définie par les points $\mathrm{C_1}$ ($\mathrm{C_2}$) et M_b, alors $\mathrm{A_1}\,(\mathrm{A_2}) \in s\,(t) \cap \phi_1$.

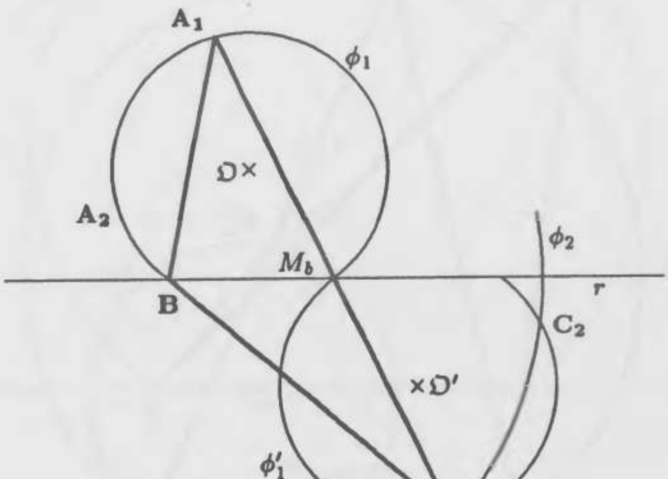


Figure 24

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathrm{A_1BC_1}$ et $\triangle \mathrm{A_2BC_2}$) solutions.

Exercice 25)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\Delta\, \mathbf{A}M_aM_b$. Nous connaissons $\overline{\mathbf{A}M_a} = m_a$, $\overline{\mathbf{A}M_b} = b/2$ et la figure 23 nous montre que $\angle \mathbf{A}M_bM_a = 180° - \alpha$. D'où la construction qui suit (voir figure 25):

i) construire l'angle α de sommet M_b; porter $\overline{M_b\mathbf{A}} = b/2$ et $\overline{M_b\mathbf{C}} = b/2$ sur le côté "droit" de l'angle (droite s);

ii) du point **A**, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ_1);

iii) si r est la droite du côté "gauche" de l'angle α, alors $M_a \in r \cap \phi_1$;

iv) si t est la droite définie par les points **C** et M_a, placer le point **B** en t tel que $\overline{M_a\mathbf{B}} = \overline{M_a\mathbf{C}}$.

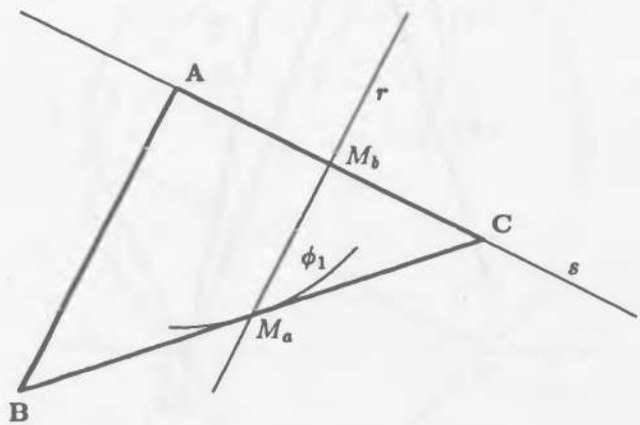


Figure 25

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 26)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 26 nous montre que le point **B** possède deux propriétés:

i) **B** appartient à un des côtés (droite r) de l'angle α;

ii) sa distance au point M_b vaut m_b.

D'où la construction qui suit (voir figure 26):

i) construire l'angle α de sommet **A**;

ii) sur le côté "droit" de l'angle (droite s), porter $\overline{\mathbf{AC}} = b$ et placer M_b tel que $\overline{\mathbf{A}M_b} = b/2$;

iii) du point M_b, avec une ouverture de compas égale à m_b, construire un arc de cercle (ϕ_1). Si r est la droite du côté "gauche" de l'angle α, alors $\mathbf{B} \in r \cap \phi_1$.

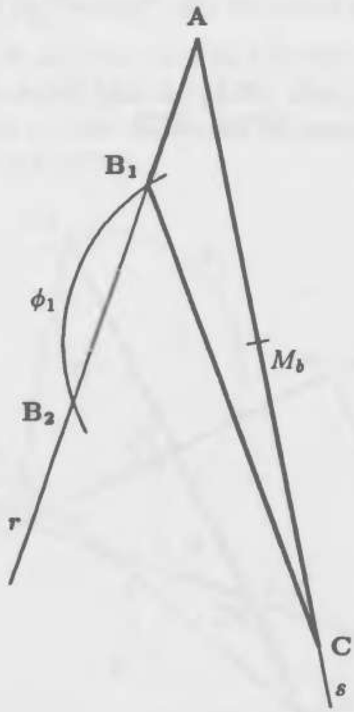


Figure 26

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{AB_1C}$ et $\triangle\,\mathbf{AB_2C}$) solutions.

Exercice 27)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 27 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) $\overline{\mathbf{CA}} = b$;

ii) un observateur placé en **A** voit le segment M_c**C** selon un angle α (**A** appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle α sur le segment M_c**C**).

D'où la construction qui suit (voir figure 27):

i) sur une droite r quelconque placer les points M_c et **C** tels que $\overline{M_c\mathbf{C}} = m_c$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point **C**, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{A} \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) le point $\mathbf{B_1}(\mathbf{B_2})$ est le symétrique du point $\mathbf{A_1}(\mathbf{A_2})$ par rapport au point M_c.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1B_1C}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2B_2C}$) solutions.

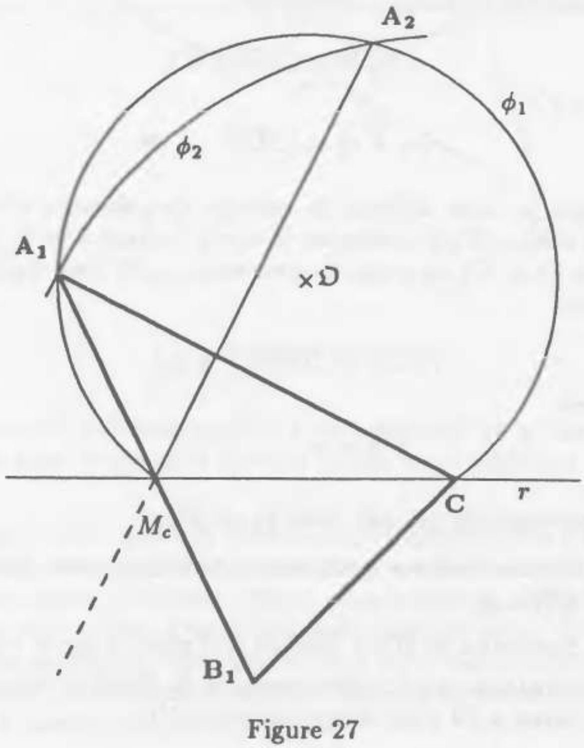


Figure 27

Exercice 28)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 28 nous montre que le point S_{a_1} possède deux propriétés:

i) il appartient à la droite qui contient les points B et C;

ii) si x représente sa distance au point D ($\overline{DS_{a_1}} = x$), alors

$$x(s_a + x) = (\overline{DC})^2. \qquad (*)$$

Pour prouver le résultat donné par l'équation (*), nous remarquons que $\triangle U\mathbf{A}_1 D \sim \triangle S_{a_1} VD$ ($\angle D$ est commun aux deux triangles et $\angle U\mathbf{A}_1 D = \angle S_{a_1} VD = 90°$). Alors, nous pouvons écrire:

$$\frac{\overline{DU}}{\overline{DS_{a_1}}} = \frac{s_a + \overline{DS_{a_1}}}{\overline{DV}}.$$

Ou

$$x(s_a + x) = (\overline{DU})(\overline{DV}).$$

Comme $\triangle U\mathbf{C}D$ est rectangle, nous avons:

$$(\overline{D\mathbf{C}})^2 = (\overline{DU})(\overline{DV}).$$

Et

$$x(s_a + x) = (\overline{D\mathbf{C}})^2. \quad \blacksquare$$

Pour construire x, nous utilisons le concept de puissance d'un point par rapport à un cercle. Si ϕ_2 représente le cercle tangent à la droite s (définie par les points D et C) au point C avec rayon $s_a/2$ (voir figure 28), nous pouvons écrire:

$$(\overline{D\mathbf{C}})^2 = \overline{DN}(\overline{DN} + s_a).$$

Par conséquent,

$$\overline{DN} = x.$$

D'où la construction qui suit (voir figure 28):

i) sur une droite r quelconque placer les points B et C tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1 (l'arc capable de l'angle α sur le segment BC);

iii) construire ϕ_2 (cercle tangent à la droite s au point C avec rayon $s_a/2$ pour obtenir le point N);

iv) du point D, avec une ouverture de compas égale à $\overline{DN}$, construire un arc de cercle (ϕ_3) et $S_a \in r \cap \phi_3$;

v) si t est la droite définie par les points D et S_{a_1}, alors $\mathbf{A} \in t \cap \phi_1$.

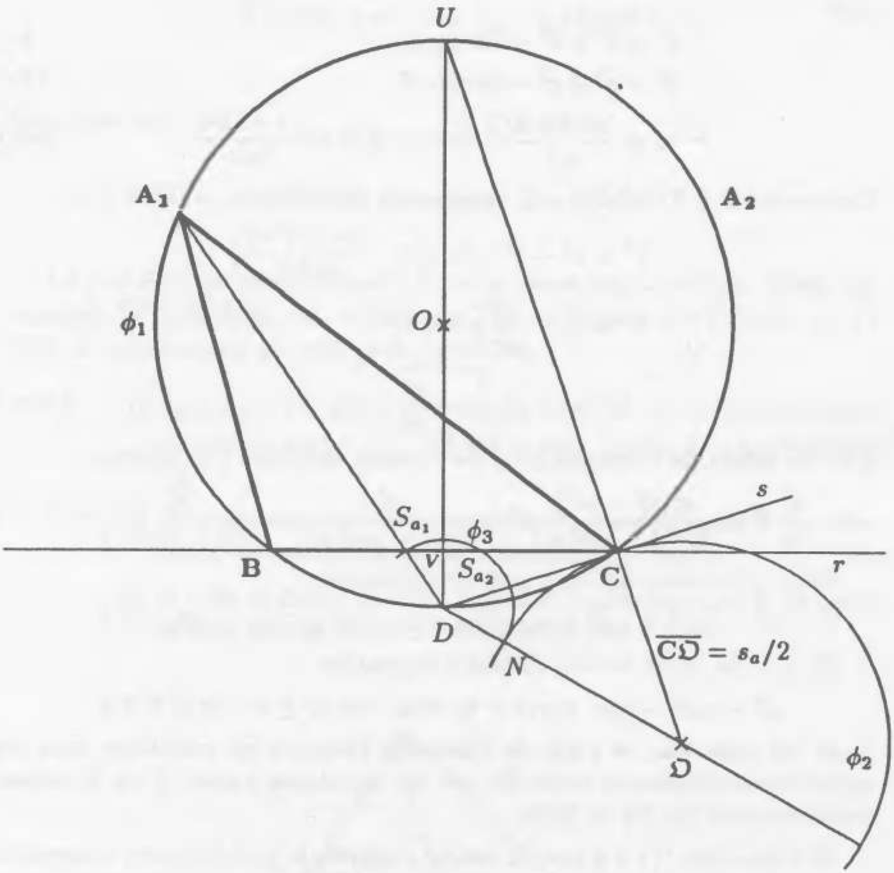


Figure 28

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que $\triangle\, \mathbf{A_1BC} \cong \triangle\, \mathbf{A_2BC}$ et dans ce cas nous n'avons qu'une seule solution).

Observation: si la solution (construction) géométrique s'avère difficile ou impossible, nous pouvons toujours faire appel à la *méthode algébrique* pour résoudre notre problème. Dans cette méthode, nous devons écrire et résoudre un système d'équations non linéaires pour obtenir la solution de notre problème. Le système peut être résolu algébriquement ou numériquement. Nous aurons l'occasion d'appliquer la méthode pour divers problèmes, à commencer par le prochain.

Exercice 29)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{$**$}$$

$$s_b = \frac{2ac\cos\beta/2}{a+c} \Longrightarrow \cos\beta/2 = \frac{(a+c)s_b}{2ac} \tag{$***$}$$

Comme $\cos\beta = 2\cos^2\beta/2 - 1$, nous avons (en utilisant $(***)$ et $(**)$):

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\Big(1 - \frac{(a+c)^2 s_b^2}{2a^2c^2}\Big)$$

$$b^2 = \Big(1 - \frac{s_b^2}{ac}\Big)(a+c)^2$$

$$b = (a+c)\sqrt{1 - \frac{s_b^2}{ac}} \tag{$****$}$$

Avec la valeur de b donnée par $(****)$, nous récrivons $(*)$, obtenant

$$c^4 - \frac{s_b^2}{a}c^3 + \frac{s_b^2(s_b^2 - 4a^2)}{4a^2(1-\cos^2\alpha)}c^2 + \frac{s_b^4}{2a(1-\cos^2\alpha)}c + \frac{s_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Si $s_b \geq 2a$, nous devons résoudre l'équation

$$c^4 - \gamma_3c^3 + \gamma_2c^2 + \gamma_1c + \gamma_0 = 0, \quad \text{où } \gamma_i \geq 0,\ i = 0,1,2,3.$$

Si $s_b < 2a$, nous devons résoudre l'équation

$$c^4 - \gamma_3c^3 - \gamma_2c^2 + \gamma_1c + \gamma_0 = 0, \quad \text{où } \gamma_i \geq 0,\ i = 0,1,2,3.$$

Dans les deux cas, la règle de Descartes (nombre de variations dans les signes des coefficients) nous dit que les équations auront 2 ou 0 racines positives (voir [3], [5] ou [30]).

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Si l'équation $(\dagger)$ a deux racines positives, le problème aura une (si les deux racines sont égales) ou deux (si les deux racines sont différentes) solutions§.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $a = 5$ cm et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^4 - \Big(162240c^3 + 1517824c^2 - 6021120c - 15052800\Big)\frac{1}{28561} = 0. \tag{$\ddagger$}$$

§ Les côtés doivent satisfaire $a < b + c$, $b < a + c$ et $c < a + b$ et les angles, $-1 < \cos\alpha, \cos\beta,\ \cos\gamma < 1$.

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$c_2 = 5{,}7275056\,\text{cm} \implies b_2 = 0{,}9721061\,\text{cm}\ .$$

Exercice 30)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathrm{AC}S_a$. Nous connaissons $\overline{\mathrm{AC}} = b$, $\overline{\mathrm{A}S_a} = s_a$ et la figure 29 nous montre que $\angle \mathrm{CA}S_a = \alpha/2$. D'où la construction qui suit (voir figure 29):

i) construire l'angle α de sommet A et sa bissectrice intérieure (droite t); porter $\overline{\mathrm{AC}} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite s);

ii) du point A, avec une ouverture de compas égale à s_a, construire un arc de cercle (ϕ_1); donc $S_a \in t \cap \phi_1$;

iii) si r est la droite du côté "gauche" de l'angle α, et u, la droite définie par les points C et S_a, alors $\mathrm{B} \in r \cap u$.

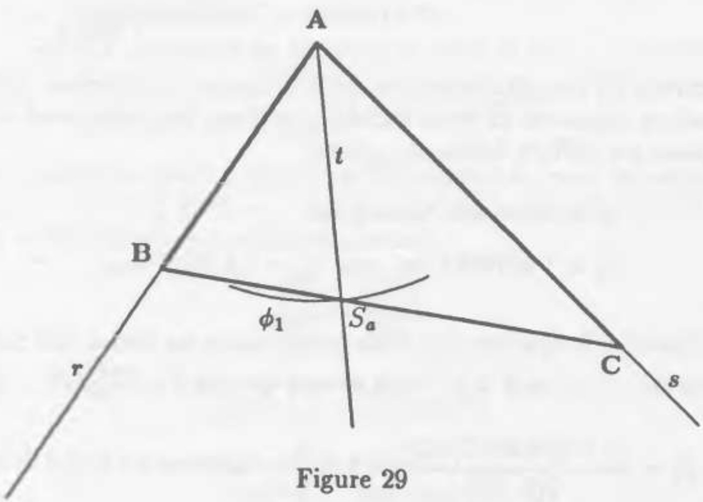


Figure 29

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 31)

Méthode algébrique

Avec les résultats des théorèmes 2 et 3 nous pouvons écrire $ac = s_b^2 + \frac{acb^2}{(a+c)^2}$. Nous avons le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Longrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \qquad (*)$$

$$ac = s_b^2 + \frac{acb^2}{(a+c)^2} \qquad (**)$$

Avec la valeur de a donnée par $(*)$, nous récrivons $(**)$, obtenant

$$c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - s_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2bs_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{s_b^2(s_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{bs_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2s_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0. \qquad (\dagger)$$

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^6 - 11c^5 + \Big(-720447c^4 + 23319296c^3 - 66705664c^2 + \\ - 331161600c + 737587200\Big)\frac{1}{28561} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant $(\ddagger)$ avec Mathematica, nous obtenons deux racines complexes, deux racines négatives et deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \Longrightarrow a_1 = 5\,\text{cm}$$

$$c_2 = 1{,}931869\,5\,\text{cm} \Longrightarrow a_2 = 5{,}610842\,6\,\text{cm}\,.$$

Vérification: le système que nous avons résolu ne tenait pas compte de la contrainte $-1 < \cos\beta < 1$. Nous savons que $\cos\beta = \frac{(a+c)^2 s_b^2}{2a^2c^2} - 1$. Donc

$$\cos\beta_1 = \frac{(5+8)^2(40\sqrt{3}/13)^2}{2(5\cdot 8)^2} - 1 = \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

$$\cos\beta_2 = \frac{(a_2+c_2)^2(40\sqrt{3}/13)^2}{2a_2^2c_2^2} - 1 \approx 5{,}9 \qquad : \text{solution étrangère.}$$

Exercice 32)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, ACS_c$. Nous connaissons (voir figure 30) $\angle CAS_c = \alpha$, $\overline{AC} = b$ et $\overline{CS_c} = s_c$. D'où la construction qui suit:

i) construire l'angle α de sommet A; porter $\overline{AC} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite s);

ii) du point C, avec une ouverture de compas égale à s_c, construire un arc de cercle (ϕ_1); si r est la droite du côté "gauche" de l'angle α, alors $S_c \in r \cap \phi_1$;

iii) comme $\angle ACS_c = \gamma/2$ (CS_c est la bissectrice intérieure de l'angle γ), nous construisons l'angle γ (droites s et t) et $B \in r \cap t$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, AB_1C$ et $\triangle\, AB_2C$) solutions.

Exercice 33)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 31 nous montre que le point A_1 possède deux propriétés:

i) il appartient à l'arc capable (ϕ_1) de l'angle α sur le segment BC;

ii) si x représente sa distance au point U ($\overline{UA_1} = x$), alors

$$x(x + t_a) = (\overline{UC})^2. \qquad (*)$$

Pour prouver le résultat donné par l'équation (*), nous remarquons que $\triangle\, UA_1D \sim \triangle\, UVT_a$ ($\angle U$ est commun aux deux triangles et $\angle UA_1D = \angle UVT_a = 90°$). Alors, nous pouvons écrire:

$$\frac{\overline{DU}}{\overline{UT_a}} = \frac{\overline{UA_1}}{\overline{UV}}.$$

Ou

$$x(x + t_a) = (\overline{DU})(\overline{UV}).$$

Comme $\triangle\, UCD$ est rectangle, nous avons:

$$(\overline{UC})^2 = (\overline{DU})(\overline{UV}).$$

Et

$$x(x + t_a) = (\overline{UC})^2. \qquad \blacksquare$$

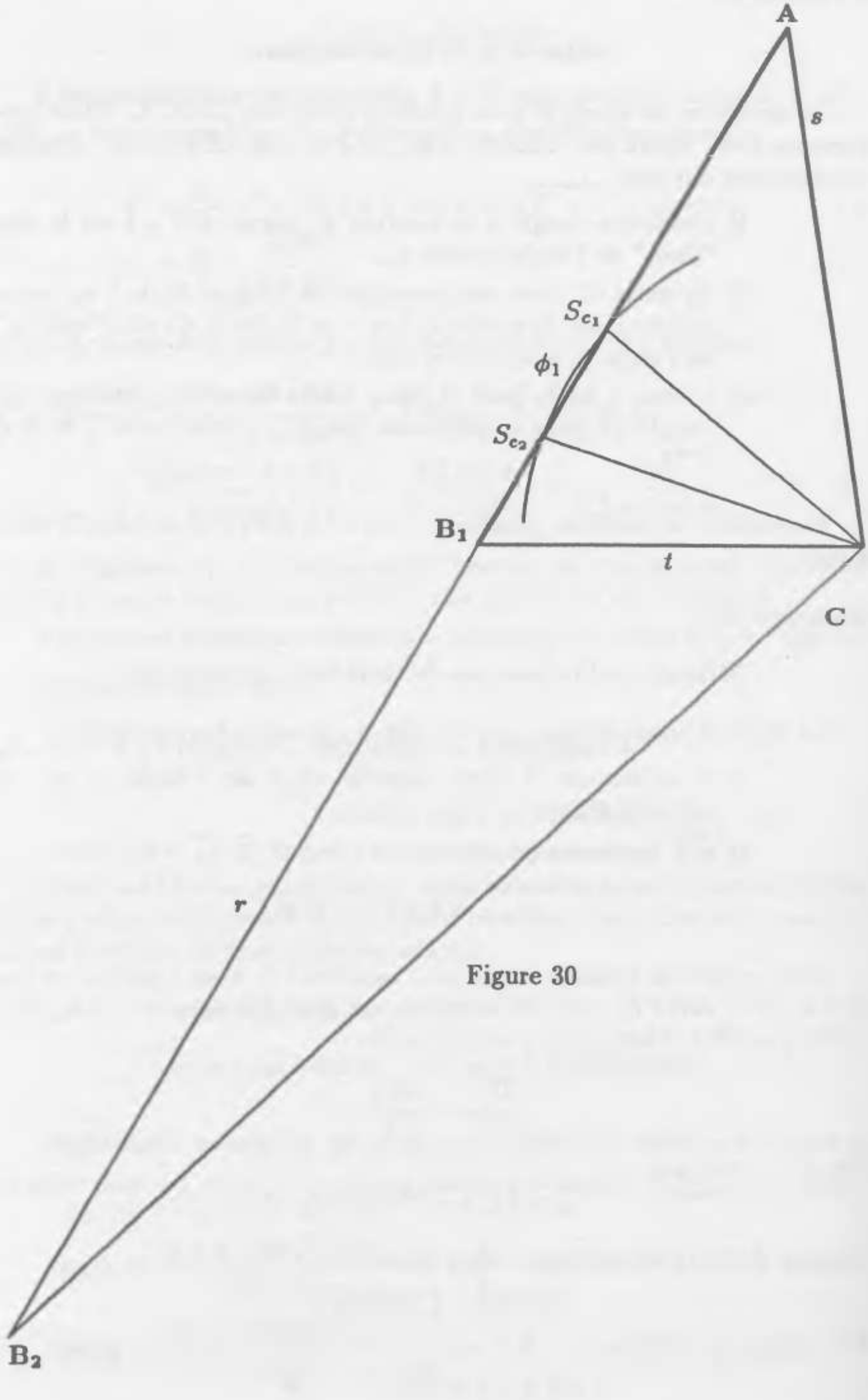


Figure 30

Pour construire x, nous utilisons le concept de puissance d'un point par rapport à un cercle. Si ϕ_2 représente le cercle tangent à la droite s (définie par les points U et C) au point C avec rayon $t_a/2$ (voir figure 31), nous pouvons écrire:

$$(\overline{U\mathbf{C}})^2 = \overline{UN}(\overline{UN} + t_a).$$

Par conséquent,

$$\overline{UN} = x.$$

D'où la construction qui suit (voir figure 31):

i) sur une droite r quelconque placer les points B et C tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1 (l'arc capable de l'angle α sur le segment BC);

iii) construire ϕ_2 (cercle tangent à la droite s au point C avec rayon $t_a/2$ pour obtenir le point N);

iv) du point U, avec une ouverture de compas égale à $\overline{UN}$, construire un arc de cercle (ϕ_3) et $\mathbf{A_1}$ ($\mathbf{A_2}$) $\in \phi_1 \cap \phi_3$.

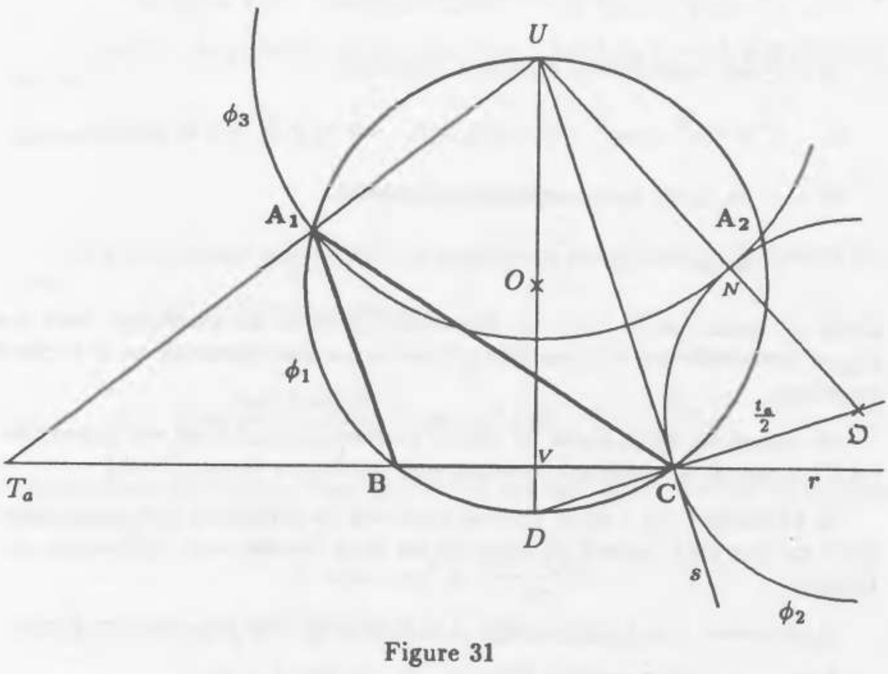


Figure 31

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que $\triangle \mathbf{A_1BC} \cong \triangle \mathbf{A_2BC}$ et dans ce cas nous n'avons qu'une seule solution).

Exercice 34)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\
t_b^2 &= \frac{4a^2c^2\sin^2\beta/2}{(a-c)^2} \Longrightarrow \sin^2\beta/2 = \left[\frac{(a-c)t_b}{2ac}\right]^2
\end{aligned}
$$

Nous savons que $\cos\beta = 2\cos^2\beta/2 - 1$ et que $\sin^2\beta/2 = 1 - \cos^2\beta/2$. Nous obtenons

$$
b = \sqrt{(a-c)^2 + \frac{[(a-c)t_b]^2}{ac}}
$$

et

$$
c^4 + \frac{t_b^2}{a}c^3 + \frac{t_b^2(t_b^2 - 4a^2)}{4a^2(1-\cos^2\alpha)}c^2 - \frac{t_b^4}{2a(1-\cos^2\alpha)}c + \frac{t_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0. \quad (\dagger)
$$

Si $t_b \geq 2a$, nous devons résoudre l'équation

$$
c^4 + \gamma_3 c^3 + \gamma_2 c^2 - \gamma_1 c + \gamma_0 = 0, \quad \text{où } \gamma_i \geq 0,\ i = 0,1,2,3.
$$

Si $t_b < 2a$, nous devons résoudre l'équation

$$
c^4 + \gamma_3 c^3 - \gamma_2 c^2 - \gamma_1 c + \gamma_0 = 0, \quad \text{où } \gamma_i \geq 0,\ i = 0,1,2,3.
$$

Dans les deux cas, la règle de Descartes (nombre de variations dans les signes des coefficients) nous dit que les équations auront 2 ou 0 racines positives.

Si l'équation ($\dagger$) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Si l'équation ($\dagger$) a deux racines positives, le problème aura une (si les deux racines sont égales) ou deux (si les deux racines sont différentes) solutions.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $a = 5\,\text{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

L'équation ($\dagger$) devient

$$
c^4 + \left(8640c^3 + 87808c^2 - 2007040c + 5017600\right)\frac{1}{243} = 0. \quad (\ddagger)
$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 3{,}032692\,2\,\mathrm{cm} \implies b_1 = 7{,}017552\,3\,\mathrm{cm}$$
$$c_2 = 8\,\mathrm{cm} \implies b_2 = 7\,\mathrm{cm}\,.$$

Exercice 35)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{AC}T_a$. Nous connaissons $\overline{\mathbf{AC}} = b$, $\overline{\mathbf{A}T_a} = t_a$ et la figure 32 nous montre que $\mathbf{C} \in s$ et $T_a \in t$. D'où la construction qui suit (voir figure 32):

i) construire l'angle α de sommet **A** et sa bissectrice extérieure (droite t); porter $\overline{\mathbf{AC}} = b$ sur le côté “droit” de l'angle (droite s);

ii) porter $\overline{\mathbf{A}T_a} = t_a$ sur la droite t;

iii) si r est la droite du côté “gauche” de l'angle α, et u, la droite définie par les points **C** et T_a, alors $\mathbf{B} \in r \cap u$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{AB_1C}$ et $\triangle\,\mathbf{AB_2C}$) solutions.

Exercice 36)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$t_b^2 = \frac{4a^2c^2\sin^2\beta/2}{(a-c)^2} \implies \sin^2\beta/2 = \left[\frac{(a-c)t_b}{2ac}\right]^2$$

Nous savons que $\cos\beta = 2\cos^2\beta/2 - 1$ et que $\sin^2\beta/2 = 1 - \cos^2\beta/2$. Nous obtenons

$$b^2 = (a-c)^2 + \frac{[(a-c)t_b]^2}{ac}.$$

Ensuite, avec $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$, nous obtenons

$$c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - t_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2bt_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{t_b^2(t_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{bt_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2t_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0. \qquad (\dagger)$$

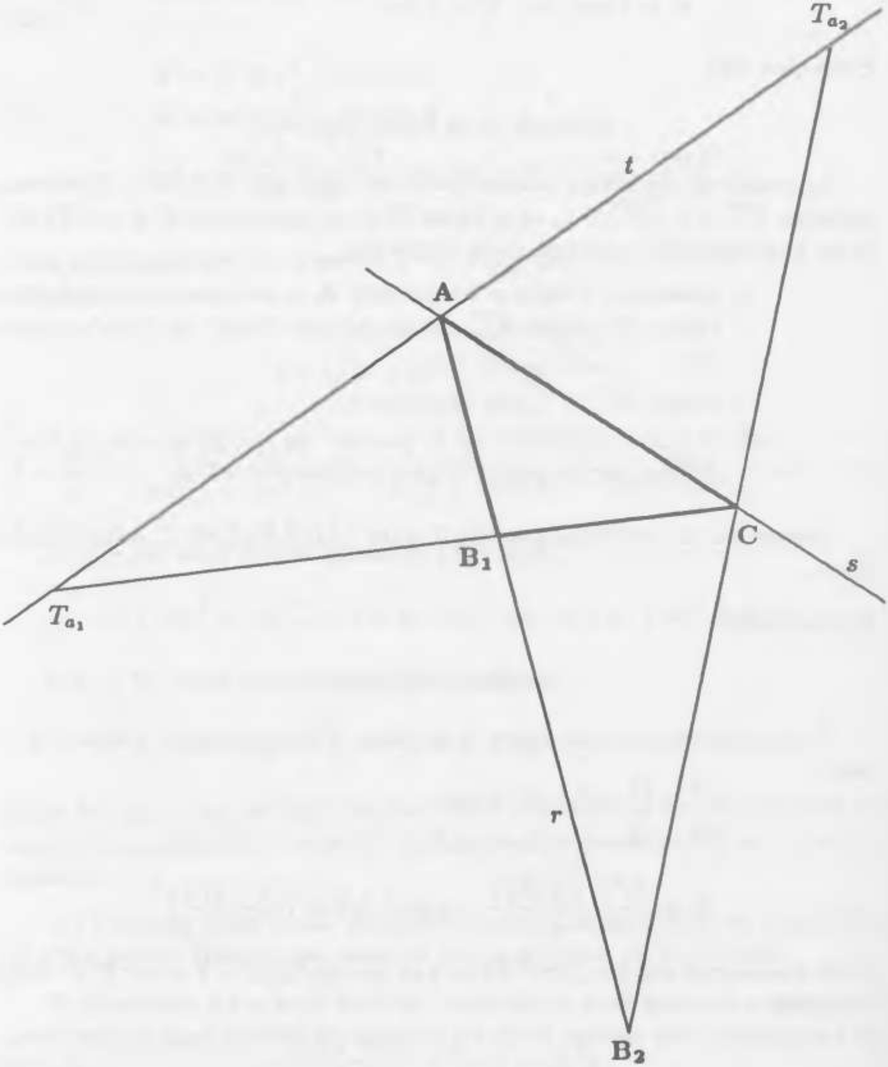


Figure 32

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^6 - 11c^5 + \Big(-100989c^4 + 1241856c^3 + 6858496c^2 + \\ - 110387200c + 245862400\Big)\frac{1}{243} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines négatives et quatre racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$\begin{aligned}
c_1 &= \;\; 3{,}0277610\,\text{cm} &\Longrightarrow\; a_1 &= \;\; 4{,}9861774\,\text{cm}\\
c_2 &= \;\; 8\,\text{cm} &\Longrightarrow\; a_2 &= \;\; 5\,\text{cm}\\
c_3 &= 12{,}8118927\,\text{cm} &\Longrightarrow\; a_3 &= \;\; 8{,}4978689\,\text{cm}\\
c_4 &= 16{,}3008991\,\text{cm} &\Longrightarrow\; a_4 &= 11{,}6365554\,\text{cm}\,.
\end{aligned}$$

Vérification: le système que nous avons résolu peut introduire des solutions étrangères. Nous devons toujours vérifier si les côtés forment réellement un triangle et qu'en plus le triangle obtenu satisfait aux conditions du problème.

Les côtés a_i, $i = 1, 2, 3, 4$ ont été calculés selon la formule

$$a_i = \sqrt{b^2 + c_i^2 - 2bc_i \cos\alpha},$$

où $b = 7$ et $\cos\alpha = 11/14$. Donc nous savons que les triangles dont les côtés valent a_i, $b = 7$ et c_i satisfont à deux conditions du problème. Il nous reste à savoir si $t_{b_i} \approx 40/3 = 13{,}3333333\ldots$. En utilisant la formule

$$t_b = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)},$$

nous obtenons:

$$\begin{aligned}
t_{b_1} = t_{b_2} = t_{b_3} &= 13{,}333333 \qquad \checkmark\\
t_{b_4} &= 15{,}412109 \qquad : \text{solution étrangère.}
\end{aligned}$$

Donc, nous pouvons «construire» trois triangles qui satisfont aux conditions du problème.

Exercice 37)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle ACS_c$. Sachant que $\angle T_cCS_c$ est un angle droit, nous avons la construction suivante (voir figure 33):

i) construire l'angle α de sommet A; porter $\overline{AC} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite s);

ii) du point C, avec une ouverture de compas égale à t_c, construire un arc de cercle (ϕ_1); si r est la droite du côté "gauche" de l'angle α, alors $T_c \in r \cap \phi_1$;

iii) construire la bissectrice intérieure de l'angle γ ($CT_c \perp CS_c$ et $S_c \in r$);

iv) obtenir B en r tel que $\angle S_cCB = \angle ACS_c$.

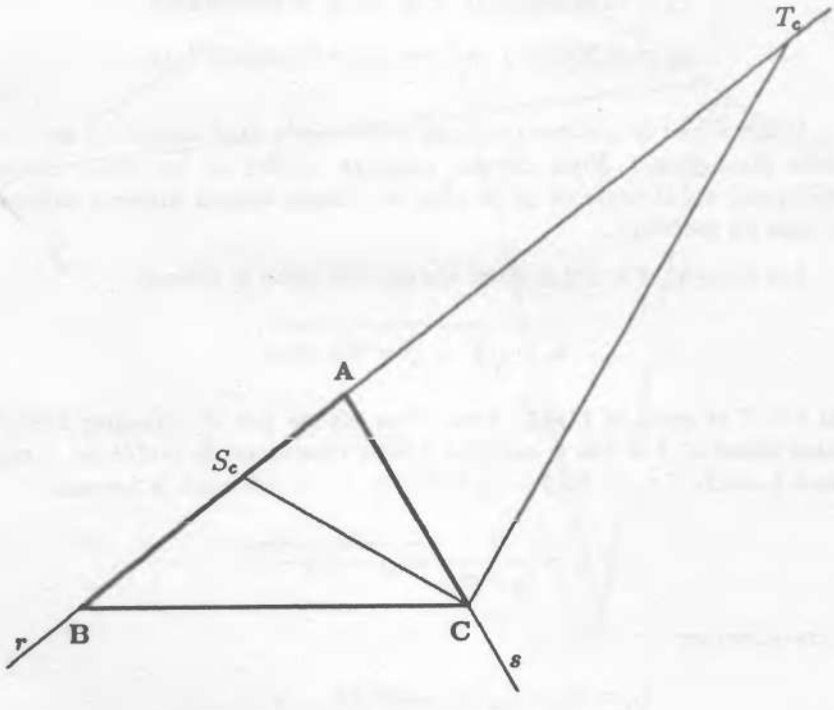


Figure 33

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 38)

Datum

Comme $a = 2R\sin\alpha$ (voir figure 2), α, a et R forment un datum. Le problème est donc impossible ou indéterminé.

Exercice 39)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 16).

Pour construire a, voir figure 8 (voir exercice 12).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 40)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 34 nous montre que le point I possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite s vaut r;

ii) il appartient à l'arc capable (ϕ_1) de l'angle $90° + \alpha/2$ sur le segment **BC**.

Pour prouver le résultat donné par ii), nous remarquons que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Dans $\triangle\,\mathbf{BC}I$, nous avons $\angle I\mathbf{BC} = \frac{\beta}{2}$ et $\angle I\mathbf{CB} = \frac{\gamma}{2}$. Donc:

$$\angle \mathbf{B}I\mathbf{C} = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2} \Longrightarrow \angle \mathbf{B}I\mathbf{C} = 90° + \frac{\alpha}{2}. \qquad \blacksquare$$

D'où la construction qui suit (voir figure 34):

i) sur une droite s quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r (rayon du cercle inscrit); nous obtenons le point I ($I = t \cap \phi_1$), centre du cercle inscrit, et le point (T_1)

de tangence du cercle avec le côté **BC** ($IT_1 \perp$ **BC**). Tracer le cercle inscrit (ϕ_2);

iv) obtenir les points de tangence T_2 et T_3 ($T_2 \in \phi_2$ et $\overline{\mathbf{C}T_1} = \overline{\mathbf{C}T_2}$; $T_3 \in \phi_2$ et $\overline{\mathbf{B}T_1} = \overline{\mathbf{B}T_3}$);

v) si u est la droite définie par les points **B** et T_3 et v, celle définie par **C** et T_2, alors $\mathbf{A} \in u \cap v$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que le triangle généré par I' et $\triangle$ **ABC** sont congruents).

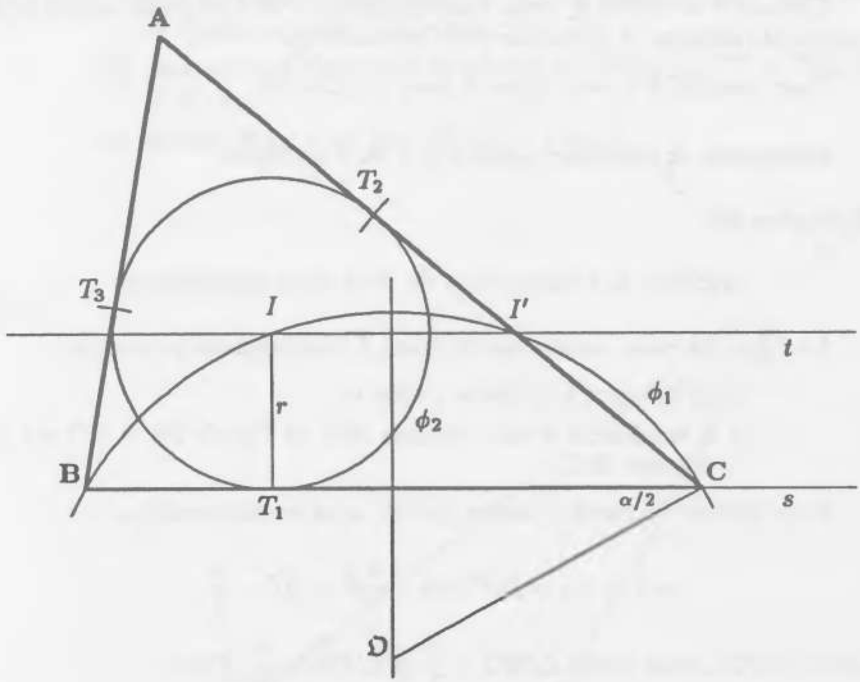


Figure 34

Exercice 41)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 35 nous montre que le point I possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite t vaut r;

ii) il appartient à la bissectrice intérieure (droite u) de l'angle α.

D'où la construction qui suit (voir figure 35):

i) construire l'angle α de sommet **A**; porter $\overline{\mathbf{AC}} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite t);

ii) construire la droite u;

iii) tracer la droite v parallèle à la droite t et distante de celle-ci d'une longueur r (rayon du cercle inscrit); nous obtenons le point I ($I = u \cap v$), centre du cercle inscrit, et le point (T_2) de tangence du cercle avec le côté **AC** ($IT_2 \perp$ **AC**). Tracer le cercle inscrit (ϕ);

iv) obtenir le point de tangence T_1 ($T_1 \in \phi$ et $\overline{\mathbf{C}T_1} = \overline{\mathbf{C}T_2}$);

v) si s est la droite du côté "gauche" de l'angle et m, celle définie par les points **C** et T_1, alors $\mathbf{B} \in m \cap s$.

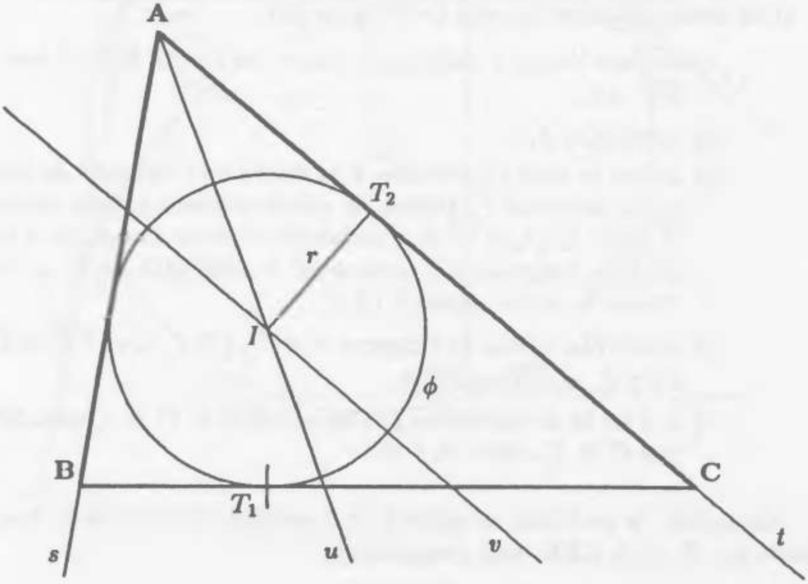


Figure 35

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 42)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 36 nous montre que le point I_a possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite s vaut r_a;

ii) il appartient à l'arc capable (ϕ_1) de l'angle $90° - \alpha/2$ sur le segment **BC**.

Pour prouver le résultat donné par ii), nous remarquons que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Dans $\triangle \mathbf{BC}I_a$, nous avons $\angle I_a\mathbf{BC} = 90° - \frac{\beta}{2}$ et $\angle I_a\mathbf{CB} = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Donc:

$$\angle \mathbf{B}I_a\mathbf{C} = 180° - \angle I_a\mathbf{BC} - \angle I_a\mathbf{CB} \Longrightarrow \angle \mathbf{B}I_a\mathbf{C} = 90° - \frac{\alpha}{2}. \qquad \blacksquare$$

D'où la construction qui suit (voir figure 36):

i) sur une droite s quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r_a (rayon du cercle exinscrit); nous obtenons le point I_a ($I_a = t \cap \phi_1$), centre du cercle exinscrit, et le point (T_1) de tangence du cercle avec le côté **BC** ($I_aT_1 \perp \mathbf{BC}$). Tracer le cercle exinscrit (ϕ_a);

iv) obtenir les points de tangence T_2 et T_3 ($T_2 \in \phi_a$ et $\overline{\mathbf{C}T_1} = \overline{\mathbf{C}T_2}$; $T_3 \in \phi_a$ et $\overline{\mathbf{B}T_1} = \overline{\mathbf{B}T_3}$);

v) si u est la droite définie par les points **B** et T_3 et v, celle définie par **C** et T_2, alors $\mathbf{A} \in u \cap v$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que le triangle généré par I'_a et $\triangle \mathbf{ABC}$ sont congruents).

Exercice 43)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 37 nous montre que le point I_b possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite s vaut r_b;

ii) il appartient à l'arc capable (ϕ_1) de l'angle $\alpha/2$ sur le segment **BC**.

Pour prouver le résultat donné par ii), nous remarquons que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

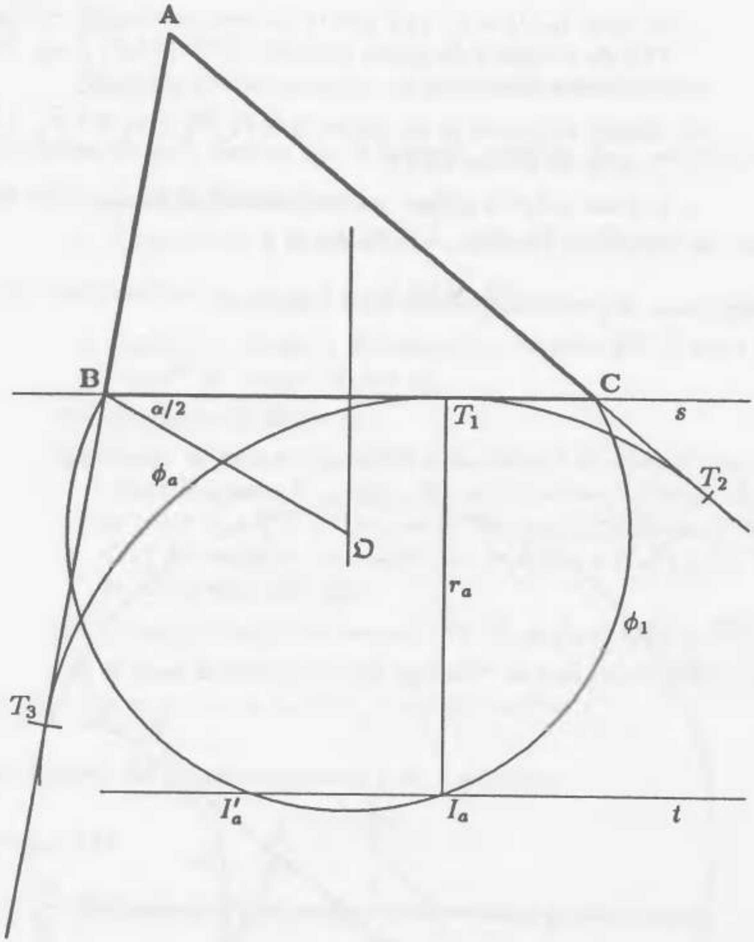


Figure 36

Dans $\triangle\, \mathbf{BC}I_b$, nous avons $\angle I_b\mathbf{BC} = \dfrac{\beta}{2}$ et $\angle I_b\mathbf{CB} = 90° + \dfrac{\gamma}{2}$. Donc:

$$\angle \mathbf{B}I_b\mathbf{C} = 180° - \angle I_b\mathbf{BC} - \angle I_b\mathbf{CB} \Longrightarrow \angle \mathbf{B}I_b\mathbf{C} = \frac{\alpha}{2}. \qquad \blacksquare$$

D'où la construction qui suit (voir figure 37):

i) sur une droite s quelconque placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r_b (rayon du cercle exinscrit); nous obtenons le point I_b ($I_b = t \cap \phi_1$), centre du cercle exinscrit, et le point (T_1) de tangence du cercle avec le côté **BC** ($I_bT_1 \perp s$). Tracer le cercle exinscrit (ϕ_b);

iv) obtenir les points de tangence T_2 et T_3 ($T_2 \in \phi_b$ et $\overline{\mathbf{C}T_1} = \overline{\mathbf{C}T_2}$; $T_3 \in \phi_b$ et $\overline{\mathbf{B}T_1} = \overline{\mathbf{B}T_3}$);

v) si u est la droite définie par les points **B** et T_3 et v, celle définie par **C** et T_2, alors $\mathbf{A} \in u \cap v$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

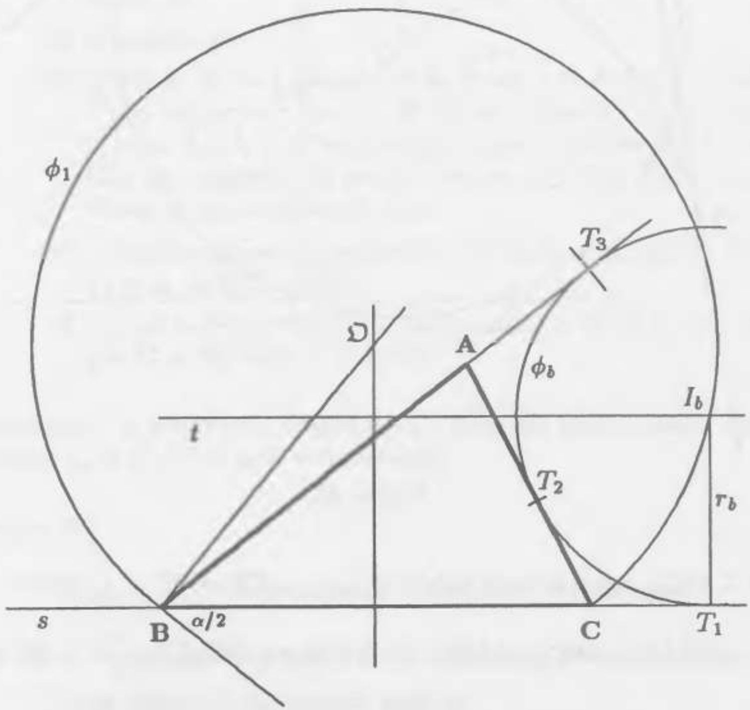


Figure 37

Exercice 44)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 38 nous montre que le point I_a possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite t vaut r_a;

ii) il appartient à la bissectrice intérieure (droite u) de l'angle α.

D'où la construction qui suit (voir figure 38):

i) construire l'angle α de sommet A; porter $\overline{\mathrm{AC}} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite t);

ii) construire la droite u;

iii) tracer la droite v parallèle à la droite t et distante de celle-ci d'une longueur r_a (rayon du cercle exinscrit); nous obtenons le point I_a ($I_a = u \cap v$), centre du cercle exinscrit, et le point (T_2) de tangence du cercle avec la droite t ($I_aT_2 \perp t$). Tracer le cercle exinscrit (ϕ_a);

iv) obtenir le point de tangence T_1 ($T_1 \in \phi_a$ et $\overline{\mathrm{C}T_1} = \overline{\mathrm{C}T_2}$);

v) si s est la droite du côté "gauche" de l'angle et m, celle définie par les points C et T_1, alors $\mathrm{B} \in m \cap s$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 45)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 39 nous montre que le point I_b possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite t vaut r_b;

ii) il appartient à la bissectrice extérieure (droite u) de l'angle α.

D'où la construction qui suit (voir figure 39):

i) construire l'angle α de sommet A; porter $\overline{\mathrm{AC}} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite t);

ii) construire la droite u;

iii) tracer la droite v parallèle à la droite t et distante de celle-ci d'une longueur r_b (rayon du cercle exinscrit); nous obtenons le point I_b ($I_b = u \cap v$), centre du cercle exinscrit, et le point (T_2) de tangence du cercle avec le côté AC ($I_bT_2 \perp \mathrm{AC}$). Tracer le cercle exinscrit (ϕ_b);

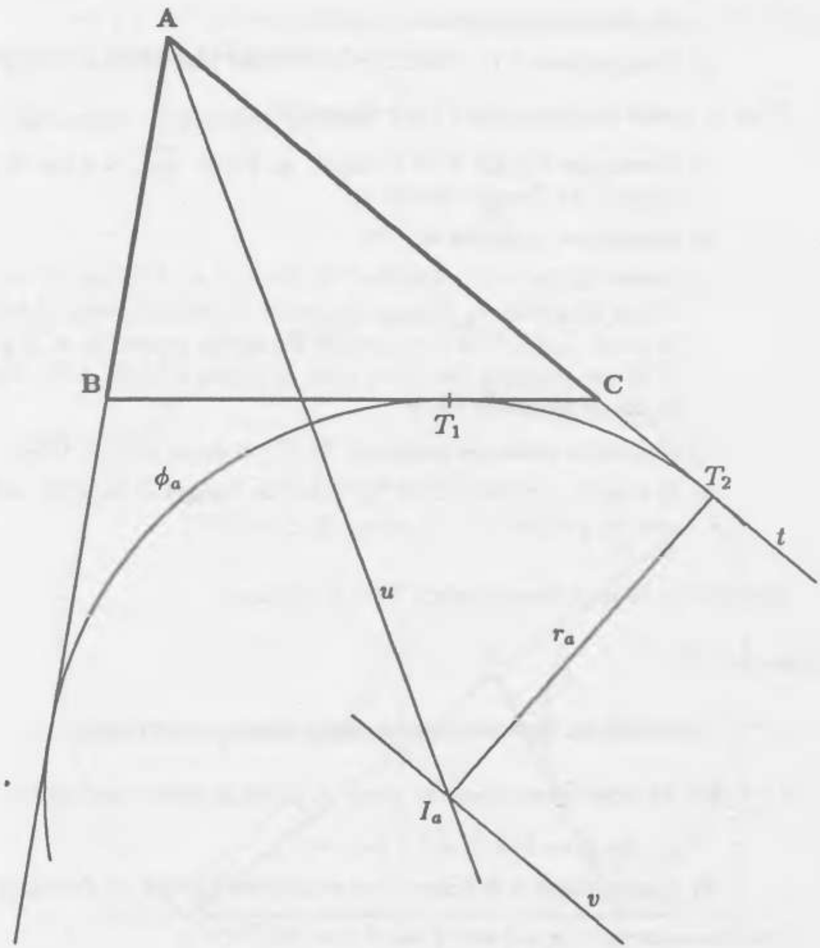


Figure 38

iv) obtenir le point de tangence T_1 ($T_1 \in \phi_b$ et $\overline{CT_1} = \overline{CT_2}$);

v) si s est la droite du côté "gauche" de l'angle et m, celle définie par les points **C** et T_1, alors $\mathbf{B} \in m \cap s$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

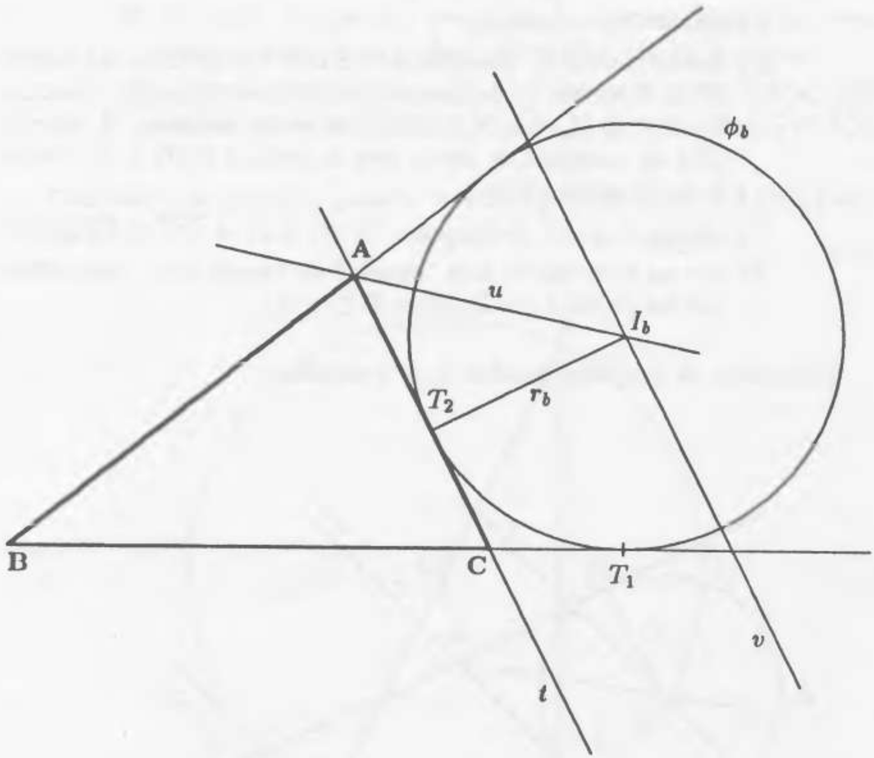


Figure 39

Exercice 46)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 40 nous montre que le point I_c possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite s vaut r_c;

ii) il appartient à la bissectrice extérieure (droite u) de l'angle α.

D'où la construction qui suit (voir figure 40):

i) construire l'angle α de sommet **A**; porter $\overline{\mathbf{AC}} = b$ sur le côté "droit" de l'angle (droite t);

ii) construire la droite u;

iii) tracer la droite v parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r_c (rayon du cercle exinscrit); nous obtenons le point I_c ($I_c = u \cap v$), centre du cercle exinscrit, et le point (T_2) de tangence du cercle avec la droite t ($I_cT_2 \perp t$). Tracer le cercle exinscrit (ϕ_c);

iv) obtenir le point de tangence T_1 ($T_1 \in \phi_c$ et $\overline{CT_1} = \overline{CT_2}$);

v) si s est la droite du côté "gauche" de l'angle et m, celle définie par les points **C** et T_1, alors $\mathbf{B} \in m \cap s$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

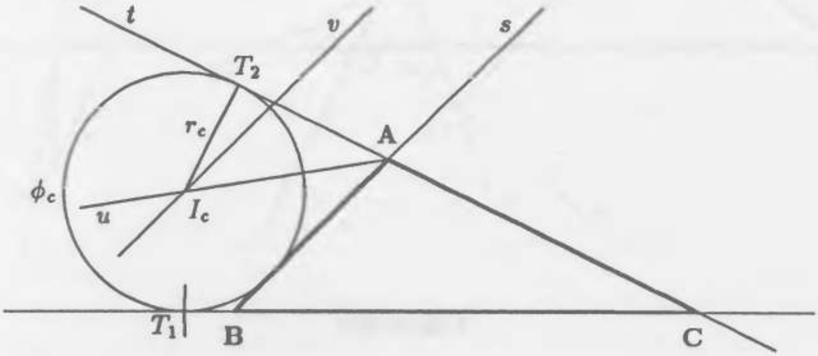


Figure 40

Exercice 47)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathbf{AB}H_b$. Nous connaissons (voir figure 41) $\angle \mathbf{AB}H_b = |90° - \alpha|$, $\angle \mathbf{B}H_b\mathbf{A} = 90°$ et $\overline{\mathbf{B}H_b} = h_b$. D'où la construction qui suit:

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et H_b tels que $\overline{\mathbf{B}H_b} = h_b$. Construire le sommet **A**;

ii) construire le cercle (ϕ_1) dont le diamètre est le segment **AB**;

iii) du point **A**, avec une ouverture de compas égale à h_a, construire un arc de cercle (ϕ_2); alors $H_{a_1}\ (H_{a_2}) \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) si s est la droite qui contient les points **A** et H_b et $t\,(u)$, celle définie par les points **B** et $H_{a_1}\ (H_{a_2})$, alors $\mathbf{C_1}\ (\mathbf{C_2}) \in s \cap t\,(u)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{ABC_1}$ et $\triangle\, \mathbf{ABC_2}$) solutions.

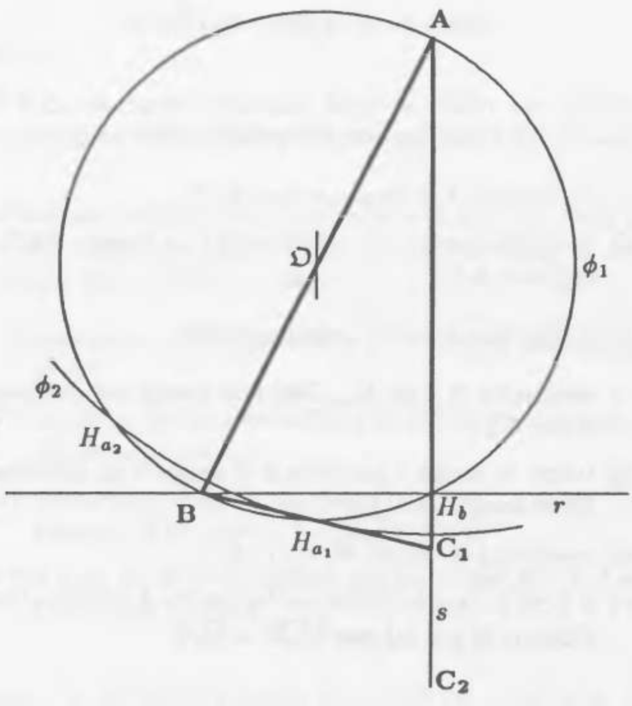


Figure 41

Exercice 48)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $h_b = c \sin\alpha$ et $h_c = b \sin\alpha$, nous avons

$$b = \frac{h_c}{\sin\alpha} \quad \text{et} \quad c = \frac{h_b}{\sin\alpha}.$$

Nous connaissons α, b et c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 17).

Pour obtenir le côté b, nous construisons $\triangle \mathrm{A}H_c\mathrm{C}$ où $\angle \mathrm{A}H_c\mathrm{C} = 90°$, $\angle H_c\mathrm{CA} = |90° - \alpha|$ et $\overline{H_c\mathrm{C}} = h_c$. Le côté c est obtenu par une construction similaire en utilisant $\triangle \mathrm{AB}H_b$.

Discussion: le problème possède toujours une solution ($0° < \alpha < 180°$).

Exercice 49)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle \mathrm{A}M_aM_b$. La figure 42 nous montre que le point M_b possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite r vaut $h_a/2$;

ii) il appartient à l'arc capable (ϕ) de l'angle $180° - \alpha$ sur le segment $\mathrm{A}M_a$.

D'où la construction qui suit (voir figure 42):

i) construire $\triangle \mathrm{A}H_aM_a$. Soit r la droite qui contient les points H_a et M_a;

ii) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur $h_a/2$;

iii) construire ϕ. Alors $M_b \in s \cap \phi$;

iv) si t est la droite définie par les points A et M_b, alors $\mathrm{C} \in r \cap t$. Obtenir $\mathrm{B} \in r$ tel que $\overline{M_a\mathrm{B}} = \overline{M_a\mathrm{C}}$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

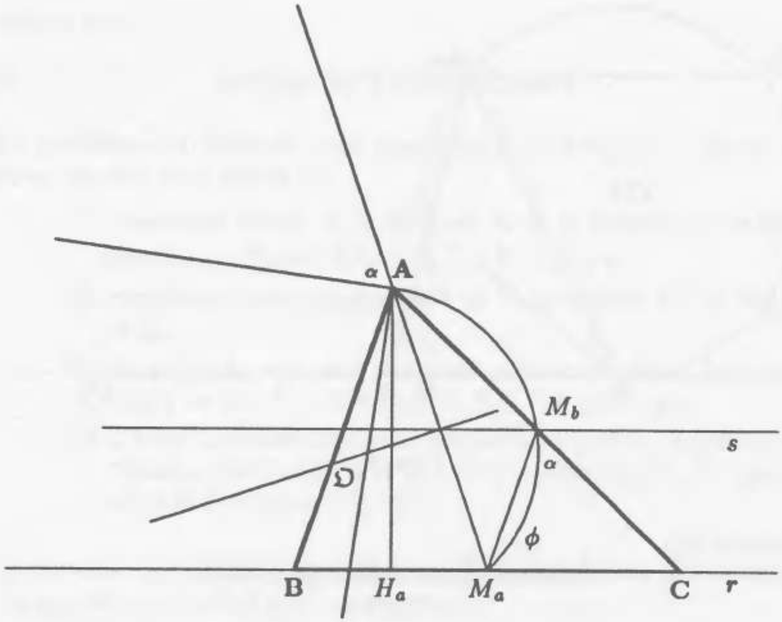


Figure 42

Exercice 50)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle \mathbf{B}DM_b$. Nous connaissons (voir figure 43) $\angle \mathbf{B}DM_b = 90°$, $\overline{DM_b} = h_a/2$ et $\overline{\mathbf{B}M_b} = m_b$. D'où la construction qui suit (voir figure 43):

i) construire $\triangle \mathbf{B}DM_b$. Soit r la droite qui contient les points B et D;

ii) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a;

iii) construire l'arc capable (ϕ) de l'angle α sur le segment $\mathbf{B}M_b$. Alors $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in s \cap \phi$;

iv) si $t\,(u)$ est la droite définie par les points $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2})$ et M_b, alors $\mathbf{C_1}\,(\mathbf{C_2}) \in r \cap t\,(u)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathbf{A_1BC_1}$ et $\triangle \mathbf{A_2BC_2}$) solutions.

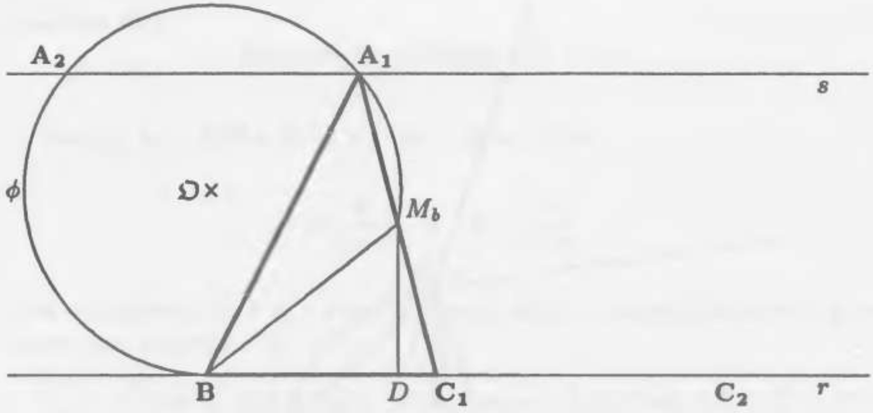


Figure 43

Exercice 51)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et m_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 25).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 52)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et m_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 27).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 53)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et m_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 26).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 54)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle \mathbf{A}H_aS_a$. D'où la construction qui suit (voir figure 44):

i) construire l'angle α de sommet **A** et sa bissectrice intérieure (droite u). Porter $\overline{\mathbf{A}S_a} = s_a$ sur la droite u;

ii) construire l'arc capable (ϕ_1) de l'angle droit sur le segment $\mathbf{A}S_a$;

iii) du point **A**, avec une ouverture de compas égale à h_a, construire un arc de cercle (ϕ_2) et H_a (H_a') $\in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) si r est la droite définie par les points H_a et S_a, s celle du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit" de l'angle α, alors $\mathbf{B} \in r \cap s$ et $\mathbf{C} \in r \cap t$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que le triangle généré par H_a' et $\triangle \mathbf{ABC}$ sont congruents).

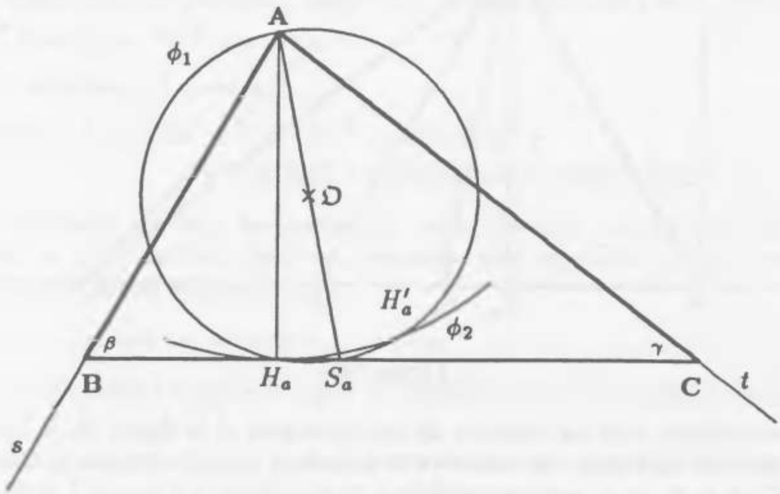


Figure 44

Remarques:

i) nous savons que

$$\angle H_a\mathbf{A}S_a = \frac{\beta-\gamma}{2}. \qquad (*)$$

Pour la preuve de l'équation (∗), voir pages 144–145.

ii) dans la figure 45, soit D le symétrique de **B** par rapport au point H_a. Donc, $\angle \mathbf{A}D\mathbf{B} = \beta$. Dans $\triangle\, \mathbf{A}DC$, nous avons:

$$\angle D\mathbf{AC} + \angle D\mathbf{CA} = \angle \mathbf{A}D\mathbf{B}$$

Par conséquent, comme $\angle D\mathbf{CA} = \gamma$,

$$\angle D\mathbf{AC} = \beta - \gamma = 2\angle H_a\mathbf{A}S_a.$$

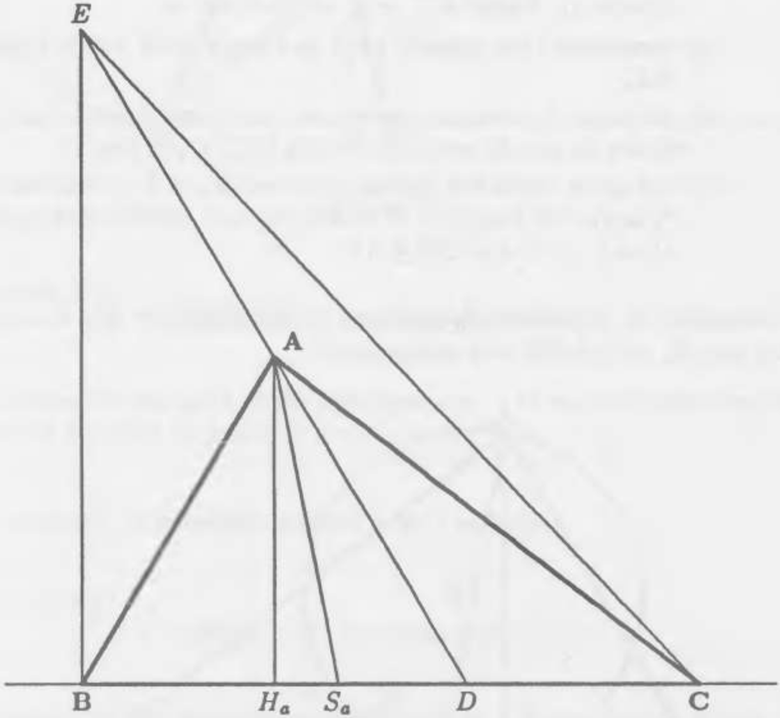


Figure 45

Observation: avec les résultats de ces remarques et la figure 45, le lecteur devrait être en mesure de résoudre le problème 148 (construire le triangle **ABC** où a, h_a et s_a sont connus).

Exercice 55)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c = \frac{h_a}{\sin\beta} \qquad (*)$$

$$ah_a = bh_b = bc\sin\alpha \Longrightarrow a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (**)$$

$$\frac{2ac\cos\beta/2}{a+c} = s_b \Longrightarrow \sin\beta/2 = \frac{h_a b\sin\alpha}{s_b(h_a + b\sin\alpha)} \qquad (***)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta. \qquad (****)$$

Avec le système (*)-(****) et sachant que

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\beta/2$$
$$\sin^2\beta = 4\sin^2\beta/2(1-\sin^2\beta/2),$$

nous obtenons

$$4\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{s_b(h_a+b\sin\alpha)}\Big)^2\Big[1-\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{s_b(h_a+b\sin\alpha)}\Big)^2\Big]b^2 =$$
$$= b^2\sin^2\alpha + h_a^2 - 2h_a b\sin\alpha\Big[1-2\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{s_b(h_a+b\sin\alpha)}\Big)^2\Big]. \qquad (\dagger)$$

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$77283b^6 - 1743805b^5 - 3782408b^4 + 22720320b^3 +$$
$$- 921984006b^2 + 2065244160b + 11565367296 = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons quatre racines complexes et deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$b_1 = 7\,\text{cm} \Longrightarrow a_1 = 5\,\text{cm}$ et $c_1 = 8\,\text{cm}$

$b_2 = 24{,}0769517\,\text{cm} \Longrightarrow a_2 = 18{,}1960092\,\text{cm}$ et $c_2 = 8{,}4643316\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 56)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 30).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 57)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 32).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 58)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et s_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 31).

Discussion: le problème possède 0 ou au moins une solution.

Exercice 59)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons α, h_a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 54).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Pour montrer que h_a, s_a et t_a forment un datum, nous écrivons (voir figure 46):

$$\frac{1}{s_a^2} + \frac{1}{t_a^2} = \frac{1}{h_a^2} \implies s_a = \sqrt{\frac{h_a^2 t_a^2}{t_a^2 - h_a^2}}, \qquad (*)$$

où l'équation (*) est une relation bien connue dans un triangle rectangle.

Pour obtenir s_a géométriquement, nous construisons la figure 46.

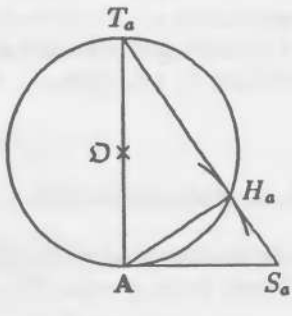


Figure 46

Exercice 60)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} \tag{$*$}$$

$$c = \frac{h_a}{\sin \beta} \tag{$**$}$$

$$\frac{4a^2c^2 \sin^2 \beta/2}{(a-c)^2} = t_b^2 \Longrightarrow \sin^2 \beta/2 = \frac{(a-c)^2 t_b^2}{4a^2c^2} \tag{$***$}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \tag{$****$}$$

Avec le système $(*)$–$(****)$ et sachant que

$$\cos \beta = 1 - 2\sin^2 \beta/2$$
$$\sin^2 \beta = 4 \sin^2 \beta/2(1 - \sin^2 \beta/2),$$

nous obtenons

$$4\Big[1 - \Big(\frac{h_a b \sin \alpha}{t_b(b \sin \alpha - h_a)}\Big)^2\Big]\Big(\frac{h_a b \sin \alpha}{t_b(b \sin \alpha - h_a)}\Big)^2 b^2 =$$
$$= b^2 \sin^2 \alpha + h_a^2 - 2h_a b \sin \alpha \Big[2\Big(\frac{h_a b \sin \alpha}{t_b(b \sin \alpha - h_a)}\Big)^2 - 1\Big]. \tag{$\dagger$}$$

Comme $\sin \alpha$, h_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir b.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Avec α, b et h_a connus, nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 20).

Exercice 61)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b / \sin \alpha$, nous connaissons α, c et t_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 35).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 62)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b / \sin\alpha$, nous connaissons α, c et t_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 37).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 63)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b / \sin\alpha$, nous connaissons α, c et t_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 36).

Exercice 64)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et h_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 18).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 65)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$ et $c = h_b / \sin\alpha$, nous connaissons α, a, c, h_b et R et nous savons déjà comment résoudre ce problème. Avec α, a et c nous retrouvons l'exercice 16; avec α, a et h_b, l'exercice 19; avec α, c et R, l'exercice 39; avec a, c et h_b, l'exercice 130; avec a, c et R, l'exercice 137. Finalement, avec a, h_b et R, l'exercice 159.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 66)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire le cercle (figure auxiliaire) qui passe par les points $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, I et I_a (voir figure 48). Par conséquent, nous commençons notre solution avec le théorème suivant (voir [1], p. 80):

Théorème 8: *Les longueurs r, r_i, h_i, $i = a, b, c$ forment un datum.*

Démonstration:

Démontrons que r, r_a, h_a forment un datum. Nous savons déjà (voir théorème 6) que

$$2S = ah_a = 2pr \implies p = \frac{ah_a}{2r} \qquad (*)$$

$$2S = ah_a = 2(p-a)r_a \qquad (**)$$

En remplaçant la valeur de p donnée par $(*)$ dans $(**)$, on obtient

$$ah_a = 2a\Big(\frac{h_a}{2r} - 1\Big)r_a \implies h_a = \frac{2rr_a}{r_a - r}. \quad \blacksquare \qquad (***)$$

De façon similaire, nous démontrons que

$$h_b = \frac{2rr_b}{r_b - r};$$

$$h_c = \frac{2rr_c}{r_c - r}.$$

De $(***)$, nous tirons que

$$r_a = \frac{rh_a}{h_a - 2r}$$

ou

$$\frac{h_a - 2r}{r} = \frac{h_a}{r_a},$$

i.e., le rayon (segment) r_a est la quatrième proportionnelle entre les segments $h_a - 2r$, r et h_a.

Pour obtenir le rayon r_a, nous faisons la construction suivante (voir figure 47):

i) construire deux droites s et t formant un angle avec sommet O où $\widehat{O} \approx 30°$ ($0° < \widehat{O} < 45°$);

ii) placer $X \in s$ tel que $\overline{OX} = h_a - 2r$;

iii) placer $Y \in t$ tel que $\overline{OY} = r$ et soit u la droite définie par les points X et Y;

iv) placer $V \in s$ tel que $\overline{XV} = h_a$ et soit v la droite parallèle à la droite u telle que $V \in v$. Soit W le point d'intersection de v et t, i.e., $W \in t \cap v$.

Nous pouvons écrire

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{XV}}{\overline{YW}} \quad \text{ou} \quad \frac{h_a - 2r}{r} = \frac{h_a}{\overline{YW}}.$$

Par conséquent,

$$\overline{YW} = r_a.$$

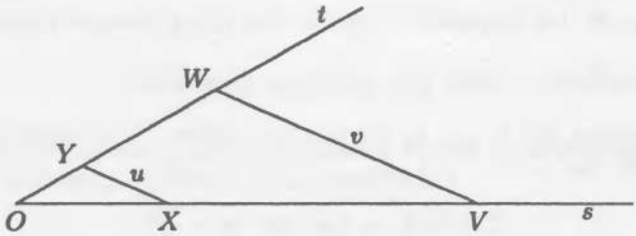


Figure 47

Ayant obtenu le rayon r_a, nous pouvons construire $\triangle$ **ABC**. Une analyse de la figure 48 nous montrera que les points **B**, **C**, I et I_a appartiennent à un même cercle. D'où la construction qui suit (voir figure 48):

i) construire l'angle α de sommet **A** et tracer sa bissectrice intérieure (droite u);
ii) en utilisant r et r_a, placer I et I_a sur u;
iii) construire l'arc capable (ϕ) de l'angle droit sur le segment II_a;
iv) si s est la droite du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in s \cap \phi$ et $\mathbf{C} \in t \cap \phi$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que les triangles $\mathbf{A}B'C'$ et **ABC** sont congruents).

Exercice 67)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b / \sin\alpha$, nous connaissons α, c et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 41).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 68)

Méthode du problème déjà résolu

Comme r, r_a, h_a forment un datum, nous connaissons α, r et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 66).

Pour obtenir r, nous écrivons

$$\frac{2r_a + h_a}{r_a} = \frac{h_a}{r},$$

i.e., le rayon (segment) r est la quatrième proportionnelle entre les segments $2r_a + h_a$, r_a et h_a et il peut être facilement construit (voir figure 47).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

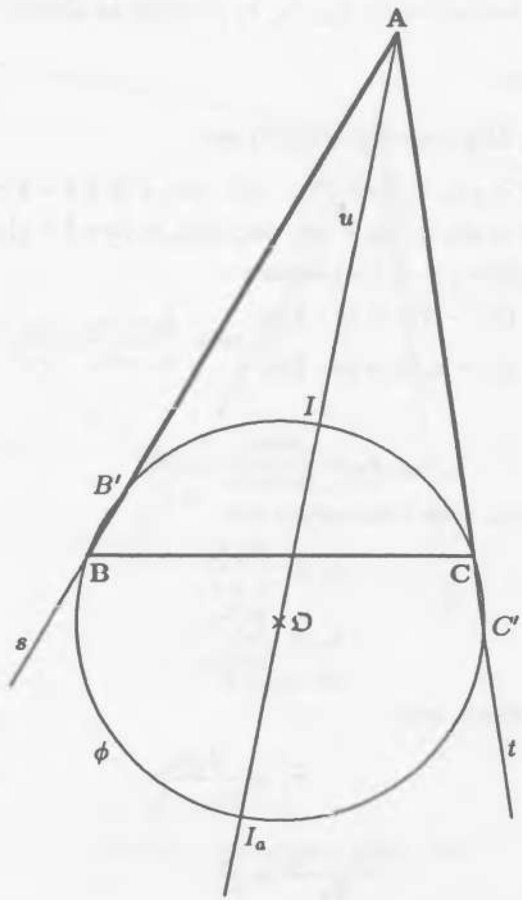


Figure 48

Exercice 69)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire le cercle (figure auxiliaire) qui passe par les points B, C, I_b et I_c (voir figure 49). Par conséquent, nous commençons notre solution avec le théorème suivant (voir [1], p. 81):

Théorème 9: *Les longueurs h_a, r_b, r_c forment un datum.*

Démonstration:

Nous savons déjà (voir théorème 6) que

$$2S = ah_a = 2(p-b)r_b \implies ah_a = (a+c-b)r_b \qquad (*)$$
$$2S = ah_a = 2(p-c)r_c \implies ah_a = (a+b-c)r_c \qquad (**)$$

Nous pouvons écrire $(*)$ et $(**)$ comme

$$\begin{aligned}(h_a - r_b)a &= (c-b)r_b \\ (r_c - h_a)a &= (c-b)r_c\end{aligned} \implies \frac{h_a - r_b}{r_c - h_a} = \frac{r_b}{r_c}.$$

Donc,

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}. \quad \blacksquare \qquad (***)$$

De façon similaire, nous démontrons que

$$h_b = \frac{2r_a r_c}{r_a + r_c};$$
$$h_c = \frac{2r_a r_b}{r_a + r_b}.$$

De $(***)$, nous tirons que

$$r_c = \frac{h_a r_b}{2r_b - h_a}$$

ou

$$\frac{2r_b - h_a}{h_a} = \frac{r_b}{r_c},$$

i.e., le rayon (segment) r_c est la quatrième proportionnelle entre les segments $2r_b - h_a$, h_a et r_b et il peut être facilement construit (voir figure 47).

Ayant obtenu le rayon r_c, nous pouvons construire $\triangle$ **ABC**. Une analyse de la figure 49 nous montrera que les points **B**, **C**, I_b et I_c appartiennent à un même cercle. D'où la construction qui suit (voir figure 49):

i) construire l'angle α de sommet **A** et tracer sa bissectrice extérieure (droite u);

ii) en utilisant r_b et r_c, placer I_b et I_c sur u;

iii) construire l'arc capable (ϕ) de l'angle droit sur le segment $I_b I_c$;

iv) si s est la droite du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in s \cap \phi$ et $\mathbf{C} \in t \cap \phi$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

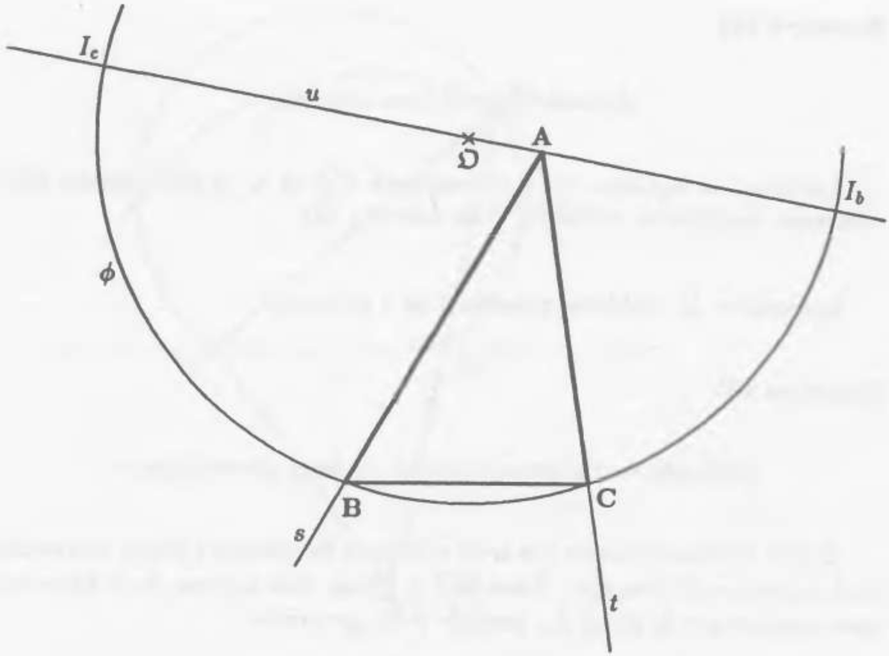


Figure 49

Exercice 70)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 44).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 71)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 46).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 72)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $c = h_b/\sin\alpha$, nous connaissons α, c et r_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 45).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 73)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Soit G le point commun des trois médianes du triangle (centre de gravité ou barycentre du triangle). Alors $\overline{\mathrm{B}G} = \frac{1}{3}2m_b$. Une analyse de la figure 50 nous montre que le point $\mathbf{A_1}$ possède deux propriétés:

i) sa distance au point G vaut $\frac{1}{3}2m_a$;

ii) il appartient à l'arc capable (ϕ_1) de l'angle α sur le segment $\mathrm{B}M_b$.

D'où la construction qui suit (voir figure 50):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B et M_b tels que $\overline{\mathrm{B}M_b} = m_b$. Placer G[§] sur $\mathrm{B}M_b$ tel que $\overline{\mathrm{B}G} = \frac{1}{3}2m_b$;

ii) construire ϕ_1 (l'arc capable de l'angle α sur le segment $\mathrm{B}M_b$);

iii) du point G, avec une ouverture de compas égale à $\frac{1}{3}2m_a$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) si $s\,(t)$ est la droite définie par les points $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2})$ et M_b, placer $\mathbf{C_1}\,(\mathbf{C_2})$ sur $s\,(t)$ tel que $\overline{M_b\mathbf{C_1}}\,(\overline{M_b\mathbf{C_2}}) = \overline{M_b\mathbf{A_1}}\,(\overline{M_b\mathbf{A_2}})$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{A_1BC_1}$ et $\triangle\,\mathbf{A_2BC_2}$) solutions.

---

§ Nous ne montrons pas comment partager un segment XY en n parties égales parce que nous allons supposer que le lecteur sait résoudre ce problème; sinon sa solution peut être vue dans [26], [28] et [31], par exemple.

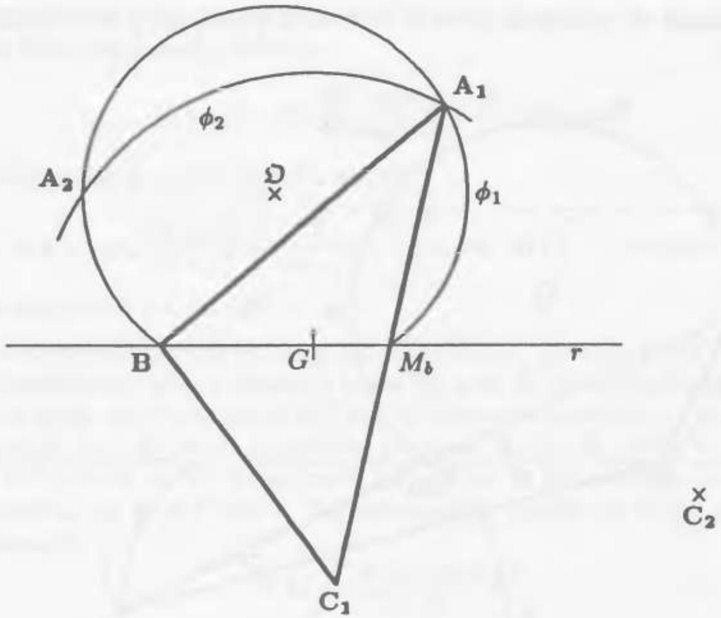


Figure 50

Exercice 74)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Soit ϕ_1 l'arc capable de l'angle α sur le segment $\mathbf{B}M_b$. Nous savons que le point **C** est le symétrique du point **A** par rapport au point M_b. Donc, si ϕ_1' représente l'image de la symétrie de ϕ_1 par rapport au point M_b, nous avons deux propriétés pour le point **C**:

i) sa distance au point G vaut $\frac{1}{3}2m_c$;

ii) il appartient à ϕ_1'.

D'où la construction qui suit (voir figure 51):

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et M_b tels que $\overline{\mathbf{B}M_b} = m_b$. Placer G sur $\mathbf{B}M_b$ tel que $\overline{\mathbf{B}G} = \frac{1}{3}2m_b$;

ii) construire ϕ_1 et ϕ_1';

iii) du point G, avec une ouverture de compas égale à $\frac{1}{3}2m_c$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{C_1}\,(\mathbf{C_2}) \in \phi_1' \cap \phi_2$;

iv) si $s\,(t)$ est la droite définie par les points $\mathbf{C_1}\,(\mathbf{C_2})$ et M_b, alors $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in s\,(t) \cap \phi_1$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC_1}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC_2}$) solutions.

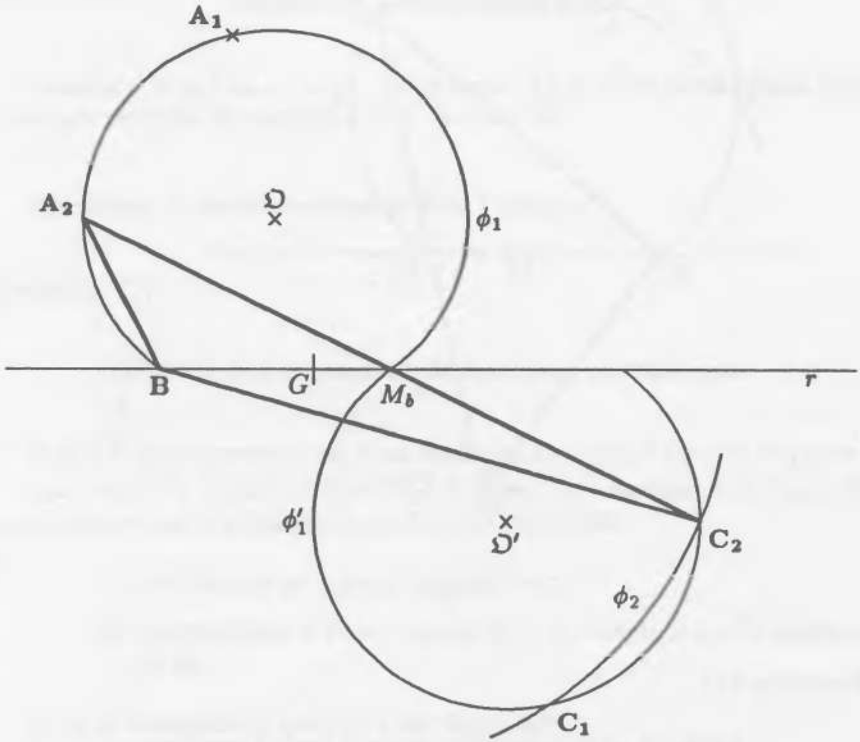


Figure 51

Exercice 75)

Méthode de la figure auxiliaire

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (*)$$

$$a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4m_a^2 \qquad (**)$$

$$\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = s_a \Longrightarrow bc = \frac{(b+c)s_a}{2\cos\alpha/2} \qquad (***)$$

Avec $(*)$ et $(**)$ nous obtenons

$$4m_a^2 = (b+c)^2 - 2(1-\cos\alpha)bc. \qquad (****)$$

Avec la valeur de bc donnée par (***) et sachant que $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2$, nous récrivons (****), obtenant

$$(b+c)^2 - 2s_a \frac{\sin^2\alpha/2}{\cos\alpha/2}(b+c) - 4m_a^2 = 0. \tag{†}$$

Nous prenons la racine positive de (†):

$$b + c = s_a \frac{\sin^2\alpha/2}{\cos\alpha/2} + \frac{2}{\cos\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}s_a \sin^2\alpha/2\right)^2 + (m_a \cos\alpha/2)^2}$$

et le segment $b + c$ est connu.

Essayons de profiter de cette nouvelle donnée. Avec un peu d'expérience et d'inspiration, nous pensons au point M, pied de la perpendiculaire menée par le point M_a (voir figure 52) sur la bissectrice intérieure (droite u) de l'angle α (i.e., M est la projection du point M_a sur la droite u). Comme M_a est le point milieu du segment $\mathbf{BC}$, M est le point milieu de B' et C', projections de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sur u. Par conséquent, comme un calcul facile peut le montrer,

$$\overline{\mathbf{A}M} = \frac{(b+c)\cos\alpha/2}{2}. \tag{‡}$$

En remplaçant la valeur de $b + c$ donnée par (†) dans (‡), nous obtenons

$$\overline{\mathbf{A}M} = \frac{1}{2}s_a \sin^2\alpha/2 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_a \sin^2\alpha/2\right)^2 + (m_a \cos\alpha/2)^2} \tag{§}$$

et le segment $\mathbf{A}M$ peut être construit! Comme le segment $\mathbf{A}M_a$ est connu, nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{A}MM_a$ (figure auxiliaire) et notre problème est résolu parce que nous connaissons aussi le point S_a. D'où la construction qui suit (voir figure 52):

i) construire l'angle α de sommet $\mathbf{A}$ et tracer sa bissectrice intérieure (droite u). Placer S_a sur u tel que $\overline{\mathbf{A}S_a} = s_a$;

ii) construire $\overline{\mathbf{A}M} = m'_a$ en utilisant (§). Placer M sur u tel que $\overline{\mathbf{A}M} = m'_a$. Par le point M ainsi obtenu, tracer la droite v telle que $v \perp u$;

iii) du point $\mathbf{A}$, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ) et $M_a\,(M'_a) \in v \cap \phi$;

iv) si r est la droite définie par les points M_a et S_a, s celle du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in r \cap s$ et $\mathbf{C} \in r \cap t$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que le triangle qui serait obtenu avec M'_a est congruent à celui généré par M_a).

Observation: pour plus de détails sur la construction de $\overline{\mathbf{A}M}$, voir [8]; pour en savoir plus sur ce problème et connaître d'autres solutions, voir [9].

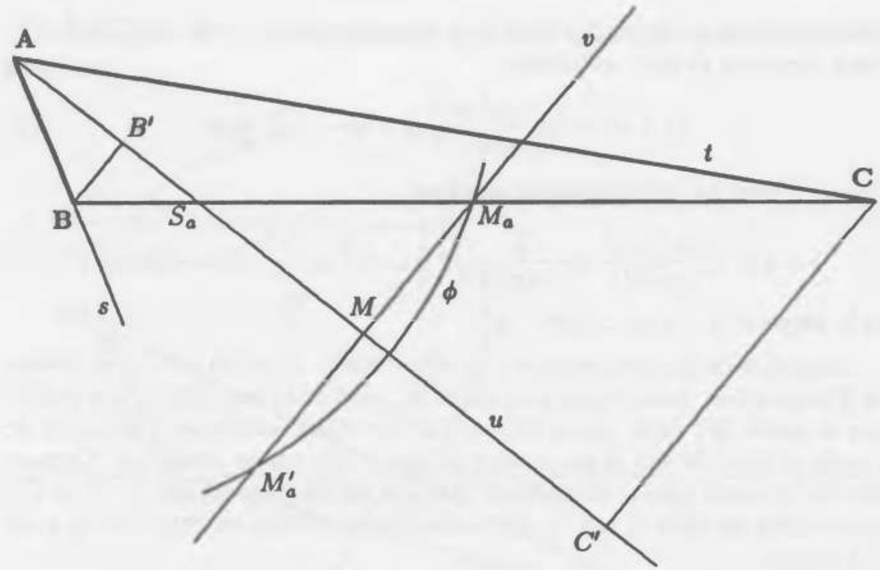


Figure 52

Exercice 76)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$

$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \qquad (**)$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, m_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 77)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 \tag{$**$}$$

$$s_a = \frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} \Longrightarrow b = \frac{s_a c}{2c\cos\alpha/2 - s_a}. \tag{$***$}$$

Avec $(*)$ et $(**)$ nous obtenons $4m_b^2 = b^2 + 4c^2 - 4bc\cos\alpha$. $\quad(****)$

Finalement, en remplaçant la valeur de b donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$c^4 - \frac{8s_a(2+\cos\alpha)\cos\alpha/2}{16\cos^2\alpha/2}c^3 + \frac{(5+4\cos\alpha)s_a^2 - 16m_b^2\cos^2\alpha/2}{16\cos^2\alpha/2}c^2 + {}$$
$$+ \frac{16m_b^2 s_a\cos\alpha/2}{16\cos^2\alpha/2}c - \frac{4m_b^2 s_a^2}{16\cos^2\alpha/2} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et s_a sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14} \Longrightarrow \cos\alpha/2 = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^4 - \frac{52}{5}c^3 - \frac{1163}{300}c^2 + \frac{1204}{5}c - \frac{33712}{75} = 0. \tag{$\ddagger$}$$

Résolvant $(\ddagger)$ avec Mathematica, nous obtenons une racine négative et trois racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 2{,}4469698\,\text{cm} \Longrightarrow b_1 = \frac{56}{15 - 56/c_1} < 0$$

$$c_2 = 4{,}7684129\,\text{cm} \Longrightarrow b_2 = 17{,}1987498\,\text{cm et } a_2 = 13{,}7717369\,\text{cm}$$

$$c_3 = 8\,\text{cm} \Longrightarrow b_3 = 7\,\text{cm et } a_3 = 5\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles dont les côtés sont (a_2, b_2, c_2) et (a_3, b_3, c_3) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 78)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \qquad (**)$$
$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 79)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \qquad (**)$$
$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = s_c^2. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $s_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 80)

Méthode de la figure auxiliaire

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant où, sans perte de généralité, nous supposons que $b > c$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$a^2 = 2(b^2 + c^2) - 4m_a^2 \tag{$**$}$$

$$\frac{2bc\sin\alpha/2}{b-c} = t_a \Longrightarrow bc = \frac{(b-c)t_a}{2\sin\alpha/2}. \tag{$***$}$$

Avec $(*)$ et $(**)$ et sachant que $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha/2$, nous obtenons

$$4m_a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cos^2\alpha/2. \tag{$****$}$$

Avec la valeur de bc donnée par $(***)$ nous récrivons $(****)$, obtenant

$$(b-c)^2 + 2t_a\frac{\cos^2\alpha/2}{\sin\alpha/2}(b-c) - 4m_a^2 = 0. \tag{$\dagger$}$$

Nous prenons la racine positive de $(\dagger)$:

$$b - c = \frac{2}{\sin\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}t_a\cos^2\alpha/2\right)^2 + (m_a\sin\alpha/2)^2} - t_a\frac{\cos^2\alpha/2}{\sin\alpha/2}$$

et le segment $b - c$ est connu.

Essayons de profiter de cette nouvelle donnée. Avec l'expérience acquise en résolvant le problème 75, nous pensons au point M, pied de la perpendiculaire menée par le point M_a (voir figure 53) sur la bissectrice extérieure (droite u) de l'angle α (i.e., M est la projection du point M_a sur la droite u). Comme M_a est le point milieu du segment $\mathbf{BC}$, M est le point milieu de B' et C', projections de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sur u. Par conséquent, comme un calcul facile peut le montrer,

$$\overline{\mathbf{A}M} = \frac{(b-c)\sin\alpha/2}{2}. \tag{$\ddagger$}$$

En remplaçant la valeur de $b - c$ donnée par $(\dagger)$ dans $(\ddagger)$, nous obtenons

$$\overline{\mathbf{A}M} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}t_a\cos^2\alpha/2\right)^2 + (m_a\sin\alpha/2)^2} - \frac{1}{2}t_a\cos^2\alpha/2 \tag{\S}$$

et le segment $\mathbf{A}M$ peut être construit! Comme le segment $\mathbf{A}M_a$ est connu, nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{A}MM_a$ (figure auxiliaire) et notre problème est résolu parce que nous connaissons aussi le point T_a. D'où la construction qui suit (voir figure 53):

i) construire l'angle α de sommet **A** et tracer sa bissectrice extérieure (droite u). Placer T_a sur u tel que $\overline{\mathbf{A}T_a} = t_a$;

ii) construire $\overline{\mathbf{A}M} = m'_a$ en utilisant (§). Placer M sur u tel que $\overline{\mathbf{A}M} = m'_a$. Par le point M ainsi obtenu, tracer la droite v telle que $v \perp u$;

iii) du point **A**, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ) et $M_a \in v \cap \phi$;

iv) si r est la droite définie par les points M_a et T_a, s celle du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in r \cap s$ et $\mathbf{C} \in r \cap t$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Observation: ce problème nous montre que, dans tout triangle,

$$m_i \geq s_i, \qquad i = a, b, c.$$

Ainsi,

$$m_a \geq s_a \text{ et } m_a = s_a \iff b = c, \quad \text{i.e., le triangle est isocèle.}$$

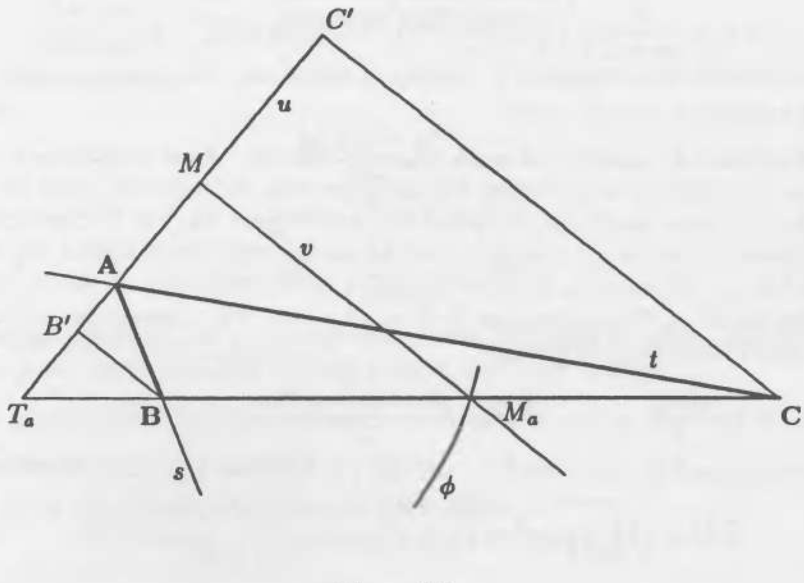


Figure 53

Exercice 81)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$
$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \qquad (**)$$
$$ac\Big[\big(\frac{b}{c-a}\big)^2-1\Big] = t_b^2. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, m_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm et $t_b = \frac{40}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 82)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant, où nous supposons d'abord que $c > b$:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha \qquad (*)$$
$$4m_b^2 = 2(a^2+c^2)-b^2 \qquad (**)$$
$$t_a = \frac{2bc\sin\alpha/2}{c-b} \Longrightarrow b = \frac{t_a c}{2c\sin\alpha/2+t_a}. \qquad (***)$$

Avec le système (*)–(***), nous pouvons montrer que nous devons trouver les racines de l'équation

$$c^4 + \frac{t_a(2-\cos\alpha)\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c^3 + \frac{(5-4\cos\alpha)t_a^2/8 - m_b^2(1-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}c^2 +$$
$$- \frac{2m_b^2 t_a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c - \frac{m_b^2 t_a^2}{2(1-\cos\alpha)} = 0. \qquad (\dagger)$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine réelle, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Nous devons maintenant supposer que $b > c$. Dans ce cas,

$$b = \frac{t_a c}{t_a - 2c\sin\alpha/2}$$

et l'équation dont nous devons trouver les racines devient

$$c^4 - \frac{t_a(2-\cos\alpha)\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c^3 + \frac{(5-4\cos\alpha)t_a^2/8 - m_b^2(1-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}c^2 + \\ + \frac{2m_b^2 t_a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c - \frac{m_b^2 t_a^2}{2(1-\cos\alpha)} = 0. \qquad (‡)$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre (‡) avec Mathematica pour obtenir c. Cependant, comme les coefficients de c^3 et c dans (†) et (‡) sont symétriques et ceux de c^4, c^2 et c^0 (le terme indépendant) sont égaux, les racines de (†) et (‡) sont symétriques. Donc, nous n'avons pas besoin de résoudre (‡).

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14} \Longrightarrow \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{3}{28}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $t_a = 8\sqrt{21}$ cm.

L'équation (†) devient

$$c^4 + 68c^3 + \frac{5695}{4}c^2 - 3612c - 101136 = 0. \qquad (\S)$$

Résolvant (§) avec Mathematica, nous obtenons une racine positive et une racine négative (racine positive de (‡)), lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = \; 8\,\text{cm} \Longrightarrow b_1 = \frac{t_a c_1}{t_a + 2c_1\sin\alpha/2} = 7\,\text{cm et } a_1 = 5\,\text{cm}$$

$$c_2' = -8{,}763984\,1\,\text{cm} \Longrightarrow c_2 = -c_2' \text{ et } b > c \Longrightarrow b_2 = \frac{t_a c_2}{t_a - 2c_2\sin\alpha/2}$$

$$c_2 = \; 8{,}763984\,1\,\text{cm} \Longrightarrow b_2 = 10{,}390019\,2\,\text{cm et } a_2 = 6{,}455139\,9\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 83)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \qquad (**)$$
$$ac\Big[\Big(\frac{b}{c-a}\Big)^2-1\Big] = t_b^2. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $t_b = \frac{40}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 84)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \qquad (**)$$
$$ab\Big[\Big(\frac{c}{b-a}\Big)^2-1\Big] = t_c^2. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $t_c = 5\sqrt{21}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 85)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et m_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 23).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 86)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et m_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 24).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 87)

Méthode du problème déjà résolu

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (*)$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \qquad (**)$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{b+c-a} \Longrightarrow b + c = \frac{2r}{\tan\alpha/2} + a. \qquad (***)$$

Avec le système (*)–(***), nous pouvons montrer que nous devons trouver les racines de l'équation

$$a^2 + 8r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a + 8\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}r^2 - 4m_a^2 = 0 \qquad (\dagger)$$

et le segment a peut être construit! (voir exercices 28 et 33, [1] et [12]). Nous connaissons alors α, a et m_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 23).

Une analyse de l'équation (†) nous dira que cette équation possède au moins une racine négative (il y a deux cas à considérer: $\cos\alpha \geq 0$ et $\cos\alpha < 0$). Par conséquent, nous avons la discussion suivante:

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 88)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \Longrightarrow a^2 = \frac{b^2 - 2c^2 + 4m_b^2}{2} \tag{$**$}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{b+c-a} \Longrightarrow a^2 = \left(b + c - \frac{2r}{\tan\alpha/2}\right)^2. \tag{$***$}$$

Avec le système $(*)$–$(***)$, nous pouvons montrer que nous devons trouver les racines positives de deux polynômes du quatrième degré en c:

$$a^2 = \frac{b^2 - 2c^2 + 4m_b^2}{2} = \left(b + c - \frac{2r}{\tan\alpha/2}\right)^2, \tag{$\dagger$}$$

où nous devons considérer deux valeurs pour b:

$$b_1 = 2\left(c\cos\alpha - \sqrt{m_b^2 - c^2\sin^2\alpha}\right)$$

$$b_2 = 2\left(c\cos\alpha + \sqrt{m_b^2 - c^2\sin^2\alpha}\right).$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et r sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14} \Longrightarrow \tan\alpha/2 = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $r = \sqrt{3}$ cm.

Avec ces valeurs (et $b = b_1$), Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 89)

Méthode du problème déjà résolu

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{$**$}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r_a}{p} = \frac{2r_a}{a+b+c} \Longrightarrow b + c = \frac{2r_a}{\tan\alpha/2} - a. \tag{$***$}$$

Avec le système $(*)$–$(***)$, nous pouvons montrer que nous devons trouver les racines de l'équation

$$a^2 - 8r_a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a + 8\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}r_a^2 - 4m_a^2 = 0 \tag{$\dagger$}$$

et le segment a peut être construit! (voir exercices 28 et 33, [1] et [12]). Nous connaissons alors α, a et m_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 23).

Exercice 90)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{$**$}$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos\beta \tag{$\dagger$}$$

$$a + b + c = \frac{2r_b}{\tan\beta/2} = 2r_b\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}}. \tag{$\ddagger$}$$

Avec $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ nous obtenons

$$\sqrt{\frac{b^2 - (c-a)^2}{(a+c)^2 - b^2}}(a + b + c) = 2r_b. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, m_a et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 91)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{$**$}$$
$$a+b+c = 2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\,r_a. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $r_a = 2\sqrt{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 92)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{$**$}$$
$$\sqrt{\frac{b^2-(c-a)^2}{(a+c)^2-b^2}}(a+b+c) = 2r_b. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 93)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{$**$}$$

$$\sqrt{\frac{c^2-(b-a)^2}{(a+b)^2-c^2}}(a+b+c) = 2r_c. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, m_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $r_c = 5\sqrt{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 94)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]bc = s_a^2 \tag{$**$}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = s_b^2. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, s_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 95)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{*}$$

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right] ac = s_b^2 \tag{**}$$

$$\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right] ab = s_c^2. \tag{***}$$

Comme $\cos\alpha$, s_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (*)–(***), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $s_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 96)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons α, h_a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercices 54 et 59).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 97)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]bc = s_a^2 \tag{$**$}$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2-1\right]ac = t_b^2. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, s_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système ($*$)–($***$), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm et $t_b = \frac{40}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 98)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = s_b^2 \tag{$**$}$$

$$\left[\left(\frac{a}{c-b}\right)^2-1\right]bc = t_a^2. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, s_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre le système ($*$)–($***$), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $t_a = 8\sqrt{21}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 99)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, s_b et t_b forment un datum, nous connaissons α, h_b et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 57).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 100)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = s_b^2 \tag{$**$}$$

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^2-1\right]ab = t_c^2. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, s_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $t_c = 5\sqrt{21}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 101)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 28).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 102)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R \sin\alpha$, nous connaissons α, a et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 29).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 103)

Premier procédé - Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle IS_aT_1$, où T_1 est le point de tangence du cercle inscrit (ϕ_1) avec le côté **BC**. La figure 54 nous montre qu'un observateur placé en T_1 voit le segment IS_a selon un angle droit (T_1 appartient à l'arc capable—ϕ_2—de l'angle droit sur le segment IS_a). Donc, nous avons deux propriétés pour le point T_1:

i) il appartient à ϕ_1;
ii) il appartient à ϕ_2.

D'où la construction qui suit (voir figure 54):

i) construire l'angle α de sommet **A** et tracer sa bissectrice intérieure (droite u);
ii) en utilisant r et s_a, placer I et S_a sur u;
iii) tracer le cercle inscrit (ϕ_1);
iv) construire l'arc capable (ϕ_2) de l'angle droit sur le segment IS_a et $T_1 \in \phi_1 \cap \phi_2$;
v) si v est la droite définie par les points T_1 et S_a, s celle du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in v \cap s$ et $\mathbf{C} \in v \cap t$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution (noter que le triangle généré par le point T_1' et $\triangle\,\mathbf{ABC}$ sont congruents).

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Si nous connaissions la position du point I_a, nous nous retrouverions avec un problème déjà résolu (exercice 66). Avec le théorème 2, nous concluons que les points **A** et S_a sont conjugués harmoniques par rapport aux points I et I_a. Donc, notre problème maintenant se résume à trouver la position du point I_a sur la bissectrice intérieure de l'angle α.

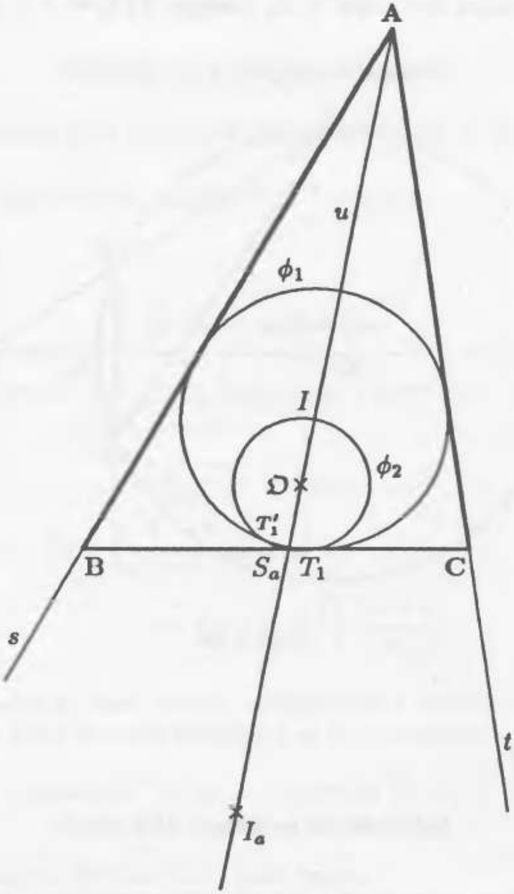


Figure 54

Nous avons le problème: trouver la position d'un quatrième point qui forme avec trois autres une division harmonique.

Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème (voir [1], [12] ou [25], par exemple). Nous allons présenter ici une construction qui utilise beaucoup les idées du théorème 2.

Sur une droite u quelconque, placer les points **A**, I et S_a. Avec le segment $\mathbf{A}S_a$ comme diamètre, tracer un cercle. Par le point I, mener une corde quelconque XY (voir figure 55). À partir du point Y, trouver le point symétrique (Y') au moyen d'une perpendiculaire YY' abaissée sur $\mathbf{A}S_a$. Tracer $XY'I_a$.

Pour justifier que I_a est le point demandé, remarquer que XS_a est la bissectrice intérieure de l'angle X du triangle XII_a et $X\mathbf{A}$ est la bissectrice extérieure.

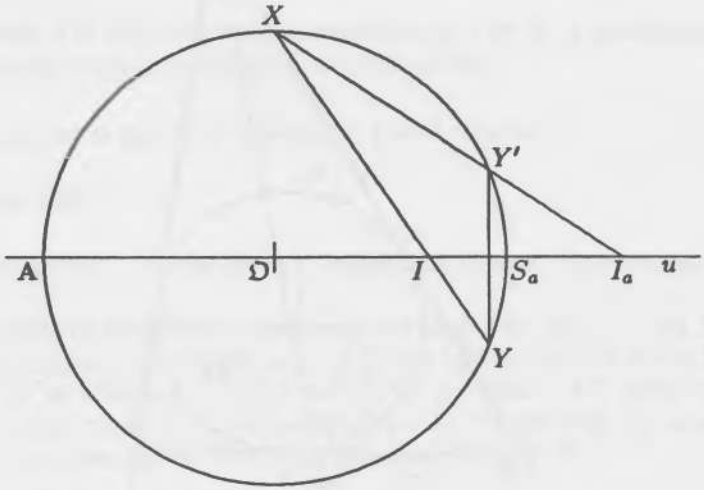


Figure 55

Exercice 104)

Méthode du problème déjà résolu

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{AB}S_b$. De ce triangle, nous connaissons un angle (l'angle α), le côté opposé à cet angle ($a = \overline{\mathbf{B}S_b} = s_b$) et la bissectrice intérieure de ce même angle ($s_a = \overline{\mathbf{A}I}$). Donc, nous nous retrouvons avec l'exercice 28, déjà résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 105)

Méthode du problème déjà résolu

Procéder comme dans l'exercice 103, avec le point I_a à la place de I.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 106)

Méthode du problème déjà résolu

Procéder comme dans l'exercice 103, avec le point I_b à la place de I.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 107)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = s_b^2 \qquad (**)$$

$$a+b+c = 2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\,r_a. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, s_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $r_a = 2\sqrt{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 108)

Méthode du problème déjà résolu

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{AB}S_b$. De ce triangle, nous connaissons un angle (l'angle α), le côté opposé à cet angle ($a = \overline{\mathbf{B}S_b} = s_b$) et la bissectrice extérieure de ce même angle ($t_a = \overline{\mathbf{A}I_b}$). Donc, nous nous retrouvons avec l'exercice 33, déjà résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 109)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac=s_b^2 \tag{$**$}$$

$$\sqrt{\frac{c^2-(b-a)^2}{(a+b)^2-c^2}}(a+b+c)=2r_c. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, s_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $r_c = 5\sqrt{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a=5\,\text{cm};\qquad b=7\,\text{cm};\qquad c=8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 110)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[\left(\frac{a}{c-b}\right)^2-1\right]bc=t_a^2 \tag{$**$}$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2-1\right]ac=t_b^2. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, t_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $t_a = 8\sqrt{21}$ cm et $t_b = \frac{40}{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a=5\,\text{cm};\qquad b=7\,\text{cm};\qquad c=8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 111)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2-1\right]ac=t_b^2 \tag{$**$}$$

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^2-1\right]ab=t_c^2. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, t_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système ($*$)–($***$), obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $t_b = \frac{40}{3}\,\mathrm{cm}$ et $t_c = 5\sqrt{21}\,\mathrm{cm}$.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a=5\,\mathrm{cm};\qquad b=7\,\mathrm{cm};\qquad c=8\,\mathrm{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 112)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a=2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et t_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 33).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 113)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a=2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et t_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 34).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 114)

Méthode du problème déjà résolu

Procéder comme dans l'exercice 103, avec le point T_a à la place de S_a.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 115)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{$*$}$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2 \tag{$**$}$$

$$-a+b+c = 2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\,r. \tag{$***$}$$

Comme $\cos\alpha$, t_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $t_b = \frac{40}{3}$ cm et $r = \sqrt{3}$ cm.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 116)

Méthode du problème déjà résolu

Procéder comme dans l'exercice 105, avec le point T_a à la place de S_a.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 117)

Méthode du problème déjà résolu

Procéder comme dans l'exercice 106, avec le point T_a à la place de S_a.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 118)

Méthode du problème déjà résolu

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, \mathbf{A}\mathbf{B}T_b$. Nous devons considérer deux possibilités:

i) $\mathbf{A}I_a$ est la bissectrice intérieure issue du sommet $\mathbf{A}$;

ii) $\mathbf{A}I_a$ est la bissectrice extérieure issue du sommet $\mathbf{A}$.

Du triangle du cas i), nous connaissons un angle (l'angle α), le côté opposé à cet angle ($a = \overline{\mathbf{B}T_b} = t_b$) et la bissectrice intérieure de ce même angle ($s_a = \overline{\mathbf{A}I_a}$). Donc, nous nous retrouvons avec l'exercice 28, déjà résolu.

Du triangle du cas ii), nous connaissons un angle (l'angle $180^\circ - \alpha$), le côté opposé à cet angle ($a = \overline{\mathbf{B}T_b} = t_b$) et la bissectrice extérieure de ce même angle ($t_a = \overline{\mathbf{A}I_a}$). Donc, nous nous retrouvons avec l'exercice 33, déjà résolu.

Ces deux possibilités sont montrées à la figure 56, où les détails de sa construction sont laissés pour les exercices 28 et 33. Nous constatons que $\triangle\, \mathbf{A'BC'}$ (cas ii)) et $\triangle\, \mathbf{ABC}$ sont congruents. Par conséquent, nous avons la discussion suivante:

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 119)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (*)$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right] ac = t_b^2 \qquad (**)$$

$$\sqrt{\frac{b^2 - (c-a)^2}{(a+c)^2 - b^2}}\,(a+b+c) = 2r_b. \qquad (***)$$

Comme $\cos\alpha$, t_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système $(*)$–$(***)$, obtenant ainsi les trois côtés a, b et c du triangle.

Application numérique: soient $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $t_b = \frac{40}{3}$ cm et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

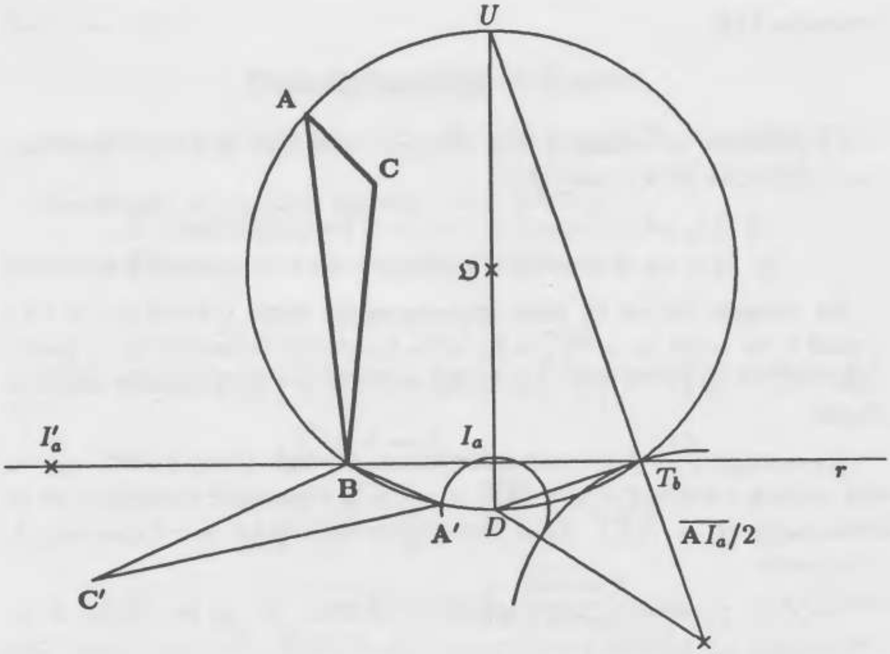


Figure 56

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 120)

Méthode du problème déjà résolu

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{AB}T_b$. Nous devons considérer deux possibilités:

i) $\mathbf{A}I_c$ est la bissectrice intérieure issue du sommet $\mathbf{A}$;

ii) $\mathbf{A}I_c$ est la bissectrice extérieure issue du sommet $\mathbf{A}$.

Du triangle du cas i), nous connaissons un angle (l'angle $180° - \alpha$), le côté opposé à cet angle ($a = \overline{\mathbf{B}T_b} = t_b$) et la bissectrice intérieure de ce même angle ($s_a = \overline{\mathbf{A}I_c}$). Donc, nous nous retrouvons avec l'exercice 28, déjà résolu.

Du triangle du cas ii), nous connaissons un angle (l'angle α), le côté opposé à cet angle ($a = \overline{BT_b} = t_b$) et la bissectrice extérieure de ce même angle ($t_a = \overline{AI_c}$). Donc, nous nous retrouvons avec l'exercice 33, déjà résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 121)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 40).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 122)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 42).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Observation: nous avons le théorème suivant:

Théorème 10: *Les longueurs a, R et $r_a - r$ forment un datum.*

Démonstration:

Soit la figure 57. Comme le point D est le point milieu du côté II_a du $\triangle IJI_a$, nous avons:

$$\overline{DM_a} + \overline{M_aE} = \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{I_aJ} = \frac{1}{2}(\overline{I_aX_a} + \overline{X_aJ}).$$

Mais $\overline{M_aE} = \overline{X_aJ} = r$ et $\overline{I_aX_a} = r_a$. Donc: $\quad \overline{DM_a} = \frac{1}{2}(r_a - r) \qquad (*)$

et, par conséquent, a, R et $r_a - r$ forment un datum. ■

Remarquer aussi que nous pouvons écrire l'équation $(*)$ comme

$$2R\Big(1 \mp \sqrt{1 - (\tfrac{a}{2R})^2}\Big) = r_a - r, \text{ où } \begin{cases} - & \text{si } \alpha \leq 90^\circ \\ + & \text{si } \alpha > 90^\circ \end{cases}$$

$$a^2 = (r_a - r)\big(4R - (r_a - r)\big)$$

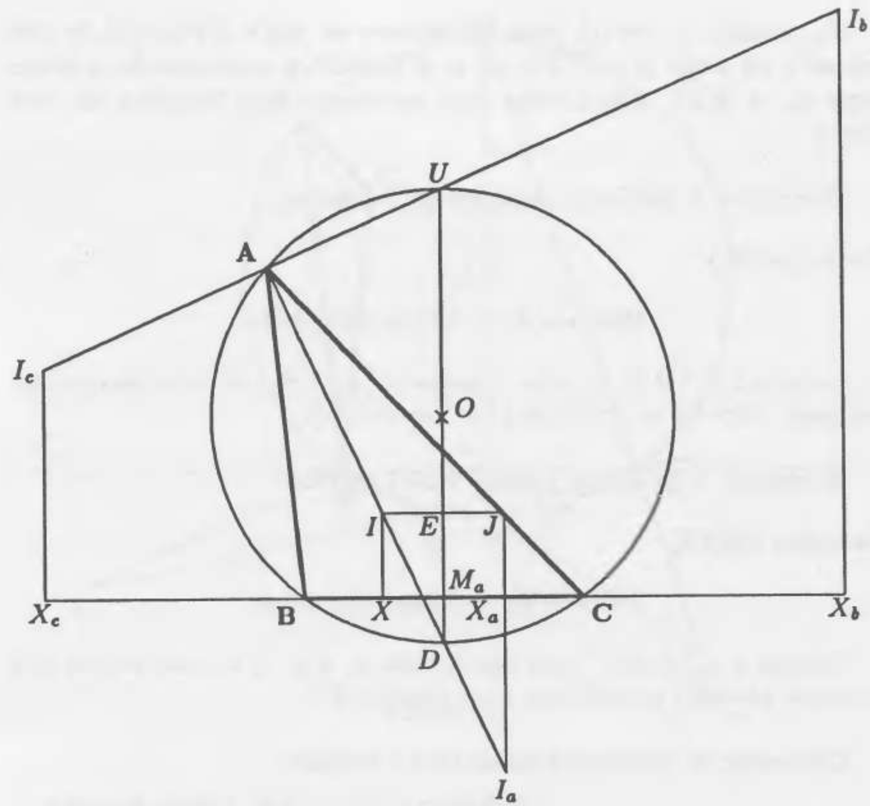


Figure 57

De façon similaire, nous démontrons que les longueurs b, R, $r_b - r$ et c, R, $r_c - r$ forment un datum.

Nous verrons plus tard des problèmes pour lesquels nous pouvons appliquer ces résultats (voir exercices 218 et 247, par exemple).

Exercice 123)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 43).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Observation: nous avons le théorème suivant:

Théorème 11: *Les longueurs a, R et $r_b + r_c$ forment un datum.*

Démonstration:

Soit la figure 57 de l'exercice précédent. Comme le point U est le point milieu du côté I_bI_c du trapèze $I_bI_cX_cX_b$, nous avons:

$$\overline{M_aU} = \frac{1}{2}(\overline{I_bX_b} + \overline{I_cX_c}) = \frac{1}{2}(r_b + r_c) \qquad (*)$$

et, par conséquent, a, R et $r_b + r_c$ forment un datum. ■

Remarquer aussi que nous pouvons écrire l'équation (*) comme

$$2R\Big(1 \pm \sqrt{1 - (\frac{a}{2R})^2}\Big) = r_b + r_c, \text{ où } \begin{cases} + & \text{si } \alpha \leq 90° \\ - & \text{si } \alpha > 90° \end{cases}$$

De façon similaire, nous démontrons que les longueurs b, R, $r_a + r_c$ et c, R, $r_a + r_b$ forment un datum.

Nous verrons plus tard des problèmes pour lesquels nous pouvons appliquer ces résultats (voir exercices 221 et 250, par exemple).

Observation: avec les résultats des théorèmes 10 et 11, nous pouvons écrire:

$$\overline{DM_a} + \overline{M_aU} = 2R = (r_a + r_b + r_c - r)/2.$$

Exercice 124)

Méthode du problème déjà résolu

La solution de ce problème fait partie de la solution du problème 66.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 125)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Nous pouvons résoudre ce problème de plusieurs façons différentes. Une analyse de la figure 48 justifie la construction suivante:

i) construire l'angle α de sommet **A** et tracer sa bissectrice intérieure (droite u) et sa bissectrice extérieure (droite u');

ii) en utilisant r et r_b, placer I sur u et I_b sur u';

iii) construire l'arc capable (ϕ) de l'angle droit sur le segment II_b;

iv) si m est la droite définie par les points I et I_b, s celle du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in m \cap s$ et $\mathbf{C} \in t \cap \phi$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 126)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Nous pouvons résoudre ce problème de plusieurs façons différentes. Une analyse de la figure 48 justifie la construction suivante:

i) construire l'angle α de sommet **A** et tracer sa bissectrice intérieure (droite u) et sa bissectrice extérieure (droite u');

ii) en utilisant r_a et r_b, placer I_a sur u et I_b sur u';

iii) construire l'arc capable (ϕ) de l'angle droit sur le segment $I_a I_b$;

iv) si m est la droite définie par les points I_a et I_b, s celle du côté "gauche" de l'angle α et t, celle du côté "droit", alors $\mathbf{B} \in s \cap \phi$ et $\mathbf{C} \in m \cap t$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 127)

Méthode du problème déjà résolu

La solution de ce problème fait partie de la solution du problème 69.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 128)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 58 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) sa distance au point **B** vaut c;

ii) sa distance au point **C** vaut b.

D'où la construction qui suit (voir figure 58):

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à c, construire un arc de cercle (ϕ_1);

iii) du point **C**, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{A} \in \phi_1 \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

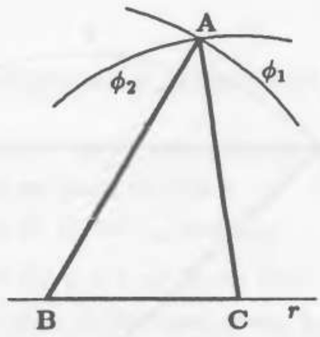


Figure 58

Exercice 129)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 59 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) sa distance au point **C** vaut b;

ii) sa distance à la droite r vaut h_a.

D'où la construction qui suit (voir figure 59):

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a;

iii) du point **C**, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ) et $\mathbf{A} \in \phi \cap s$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

Exercice 130)

Méthode de la figure auxiliaire

La figure 60 nous montre que le point H_c possède deux propriétés:

i) sa distance au point **C** vaut h_c;

ii) un observateur placé en H_c voit le segment **BC** selon un angle droit (H_c appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle droit sur le segment **BC**).

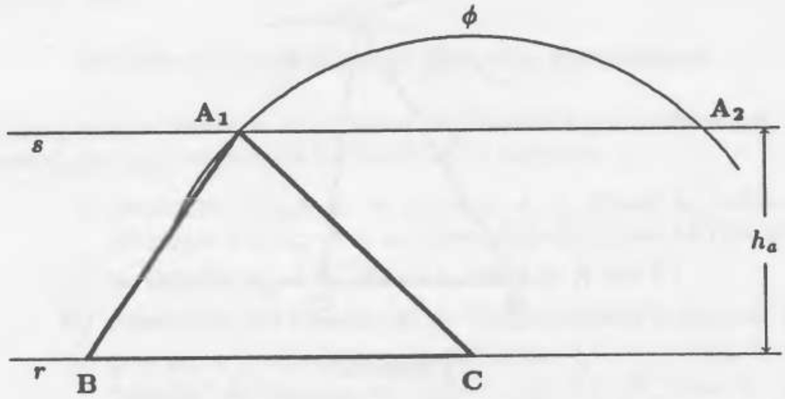


Figure 59

D'où la construction qui suit (voir figure 60):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B et C tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point C, avec une ouverture de compas égale à h_c, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $H_c \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) du point C, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ_3). Si t est la droite définie par les points B et H_c, alors $\mathbf{A} \in \phi_3 \cap t$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

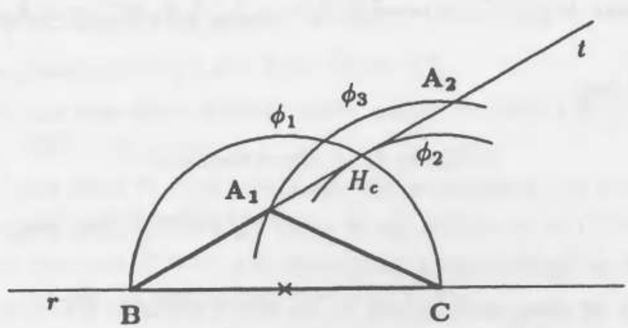


Figure 60

Exercice 131)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 61 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) sa distance au point C vaut b;

ii) sa distance au point M_a vaut m_a.

D'où la construction qui suit (voir figure 61):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B, M_a et C tels que $\overline{BC} = a$ et $\overline{M_aB} = \overline{M_aC}$;

ii) du point C, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ_1);

iii) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $A \in \phi_1 \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

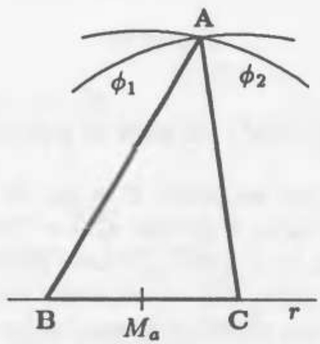


Figure 61

Exercice 132)

Premier procédé - Méthode de la figure auxiliaire

La figure 62 nous montre que le point M_c possède deux propriétés:

i) sa distance au point C vaut m_c;

ii) sa distance au point M_a vaut $b/2$.

D'où la construction qui suit (voir figure 62):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B, M_a et C tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$ et $\overline{M_a\mathbf{B}} = \overline{M_a\mathbf{C}}$;

ii) du point C, avec une ouverture de compas égale à m_c, construire un arc de cercle (ϕ_1);

iii) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à $b/2$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $M_c \in \phi_1 \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

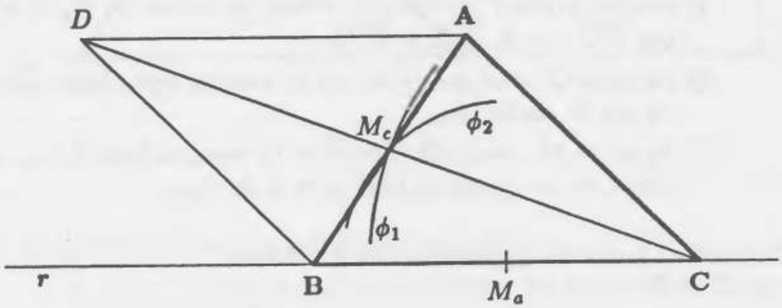


Figure 62

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Sur la droite définie par les points C et M_c de la figure 62, nous construisons le point D de façon à obtenir $\overline{\mathbf{C}D} = 2m_c$. Par conséquent, le quadrilatère DBCA est un parallélogramme parce que ses diagonales se coupent en leur milieu. Donc, $\overline{\mathbf{B}D} = b$ et nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{BC}D$ (figure auxiliaire) parce que nous connaissons les longueurs de ses trois côtés (voir exercice 128). Ayant construit le point D, le point A est facilement obtenu étant donné que $\overline{\mathbf{CA}} = b$ et $\overline{D\mathbf{A}} = a$.

Exercice 133)

Méthode algébrique

Nous savons que

$$bc = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} + s_a^2.$$

De cette équation, nous tirons que

$$c^3 + \left(2b - \frac{s_a^2}{b}\right)c^2 + (b^2 - a^2 - 2s_a^2)c - bs_a^2 = 0. \qquad (*)$$

Comme a, b et s_a sont connus, nous pouvons résoudre l'équation ($*$), obtenant ainsi le côté c.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

Avec ces valeurs, l'équation ($*$) devient

$$c^3 + \frac{62}{9}c^2 - \frac{680}{9}c - \frac{3136}{9} = 0$$

et Mathematica nous donne $c = 8\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Discussion: une analyse de l'équation ($*$) nous permettra de conclure que cette équation possède au plus une racine positive. Donc, le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 134)

Premier procédé - Méthode algébrique

Nous savons que

$$s_c = \frac{2ab\cos\gamma/2}{a+b} \Longrightarrow \cos\gamma/2 = \frac{(a+b)s_c}{2ab}.$$

Comme

$$\cos\gamma = 2\cos^2\gamma/2 - 1,$$

alors

$$\cos\gamma = 2\Big[\frac{(a+b)s_c}{2ab}\Big]^2 - 1.$$

Avec $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, nous obtenons

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - \frac{[(a+b)s_c]^2}{ab}}.$$

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Soit r la droite qui contient les points **B** et **C**. Si nous supposons le problème déjà résolu (voir figure 61), nous pouvons mener à partir du point **A** la droite v parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle γ (droite qui contient les points **C** et S_c), obtenant le point D commun à ces deux droites ($D \in r \cap v$). Le problème est résolu si nous pouvons construire

$\triangle\, \mathbf{A}\mathbf{C}D$ (figure auxiliaire). Une analyse de la figure 61 (avec ces nouveaux éléments) nous montre que

$$\angle \mathbf{ACS}_c = \angle \mathbf{CA}D \quad \text{comme angles alternes-internes}$$

$$\angle \mathbf{BCS}_c = \angle \mathbf{C}D\mathbf{A} \quad \text{comme angles correspondants}$$

Mais $\angle \mathbf{ACS}_c = \angle \mathbf{BCS}_c = \gamma/2$ parce que $\mathbf{C}S_c$ est la bissectrice intérieure de l'angle γ. Donc $\angle \mathbf{CA}D = \angle \mathbf{C}D\mathbf{A}$ et $\triangle\, \mathbf{AC}D$ est un triangle isocèle. Par conséquent, $\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{C}D} = b$.

En outre, $\triangle\, \mathbf{BC}S_c \sim \triangle\, \mathbf{B}D\mathbf{A}$. Nous pouvons écrire

$$\frac{a}{a+b} = \frac{s_c}{\overline{\mathbf{A}D}}$$

et le segment $\overline{\mathbf{A}D}$ peut être construit puisqu'il est la quatrième proportionnelle entre les segments a, $a+b$ et s_c.

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite r quelconque, placer les points $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et D tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$ et $\overline{\mathbf{C}D} = b$;

ii) construire la quatrième proportionnelle entre les segments a, $a+b$ et s_c (segment x);

iii) du point $\mathbf{C}$, avec une ouverture de compas égale à b, construire un arc de cercle (ϕ_1);

iv) du point D, avec une ouverture de compas égale à x, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{A} \in \phi_1 \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 135)

Méthode algébrique

Nous savons que

$$bc = \frac{a^2bc}{(b-c)^2} - t_a^2.$$

De cette équation, nous tirons que

$$c^3 + \left(\frac{t_a^2}{b} - 2b\right)c^2 + (b^2 - a^2 - 2t_a^2)c + bt_a^2 = 0. \qquad (*)$$

Comme a, b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre l'équation $(*)$, obtenant ainsi le côté c.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Avec ces valeurs, l'équation $(*)$ devient

$$c^3 + 178c^2 - 2664c + 9408 = 0$$

et Mathematica nous donne $c_1 = 8\,\text{cm}$ et $c_2 = 6{,}1211380\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ces deux triangles satisfont à toutes les conditions du problème.

Discussion: une analyse de l'équation $(*)$ nous permettra de conclure que cette équation possède au plus deux racines positives. Donc, le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 136)

Premier procédé - Méthode algébrique

Nous savons que

$$t_c = \frac{2ab\sin\gamma/2}{|a-b|} \Longrightarrow \sin\gamma/2 = \frac{|a-b|t_c}{2ab}.$$

Comme

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma/2,$$

alors

$$\cos\gamma = 1 - 2\left[\frac{(a-b)t_c}{2ab}\right]^2.$$

Avec $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, nous obtenons

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + \frac{[(a-b)t_c]^2}{ab}}.$$

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

En suivant le même raisonnement fait lors de l'exercice 134, les figures 63.1 et 63.2 nous montrent que nous devons considérer deux possibilités: $a > b$ et $b > a$.

Si $a > b$, le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{AC}D$ (figure auxiliaire). Une analyse de la figure 63.1 nous permet de conclure que $\triangle\,\mathbf{AC}D$ est isocèle et que $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{C}D} = b$. En outre, $\triangle\,T_c\mathbf{BC} \sim \triangle\,\mathbf{AB}D$. Par conséquent,

$$\frac{a}{a-b} = \frac{t_c}{\overline{\mathbf{A}D}}$$

et nous connaissons les longueurs des trois côtés du $\triangle \mathbf{AC}D$.

Si $b > a$, le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle \mathbf{BC}D$ (figure auxiliaire). Une analyse de la figure 63.2 nous permet de conclure que $\triangle \mathbf{BC}D$ est isocèle et que $\overline{\mathbf{CB}} = \overline{\mathbf{C}D} = a$. En outre, $\triangle \mathbf{A}T_c\mathbf{C} \sim \triangle \mathbf{AB}D$. Par conséquent,

$$\frac{b}{b-a} = \frac{t_c}{\overline{\mathbf{B}D}}$$

et nous connaissons les longueurs des trois côtés du $\triangle \mathbf{BC}D$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

$a > b$

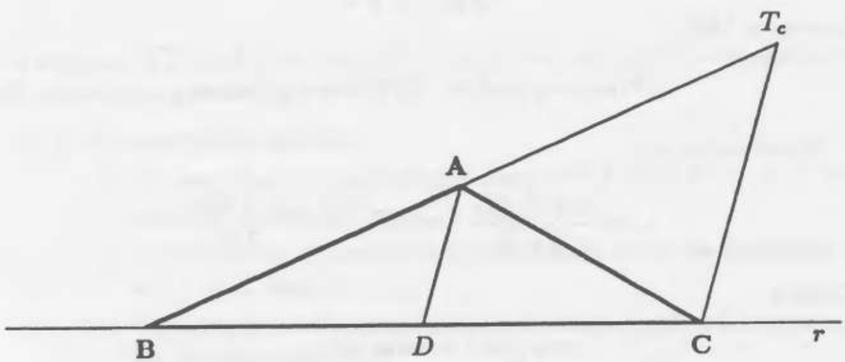


Figure 63.1

Exercice 137)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 16).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 138)

Méthode algébrique

Nous savons que

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{où } c = 2p - (a+b).$$

$b > a$

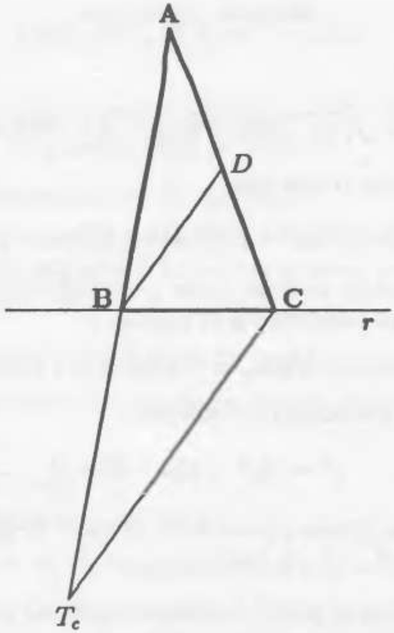


Figure 63.2

De cette équation, nous tirons que

$$p^3 - 2(a+b)p^2 + (a^2 + 3ab + b^2 + r^2)p - ab(a+b) = 0. \qquad (*)$$

Comme a, b et r sont connus, nous pouvons résoudre l'équation $(*)$, obtenant ainsi le demi-périmètre p et ensuite c.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Avec ces valeurs, l'équation $(*)$ devient

$$p^3 - 24p^2 + 182p - 420 = 0$$

et Mathematica nous donne $p_1 = 10\,\text{cm}$ et $p_2 = 7 + \sqrt{7}$. Par conséquent, $c_1 = 8\,\text{cm}$ et $c_2 = 2(1 + \sqrt{7}) = 7{,}291502\,6\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ces deux triangles satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 139)

Méthode algébrique

Nous savons que

$$S = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{où } c = 2p-(a+b).$$

De cette équation, nous tirons que

$$p^3 - (a+2b)p^2 + [(a+b)b + r_a^2]p - ar_a^2 = 0. \qquad (*)$$

Comme a, b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre l'équation (*), obtenant ainsi le demi-périmètre p et ensuite c.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Avec ces valeurs, l'équation (*) devient

$$p^3 - 19p^2 + 96p - 60 = 0$$

et Mathematica nous donne $p_1 = 10\,\text{cm}$ et $p_2 = \frac{9+\sqrt{57}}{2}$. Par conséquent, $c_1 = 8\,\text{cm}$ et $c_2 = \sqrt{57} - 3 = 4{,}549834\,4\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ces deux triangles satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 140)

Méthode algébrique

Nous savons que

$$S = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{où } c = 2p-(a+b).$$

De cette équation, nous tirons que

$$p^3 - (a+b)p^2 + (ab + r_c^2)p - (a+b)r_c^2 = 0. \qquad (*)$$

Comme a, b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre l'équation (*), obtenant ainsi le demi-périmètre p et ensuite c.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Avec ces valeurs, l'équation (*) devient

$$p^3 - 12p^2 + 110p - 900 = 0$$

et Mathematica nous donne $p = 10\,\text{cm}$. Par conséquent, $c = 8\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que ce triangle satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 141)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathbf{BC}H_b$. La figure 64 nous montre que le point H_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point **B** vaut h_b;

ii) un observateur placé en H_b voit le segment **BC** selon un angle droit (H_b appartient à l'arc capable — ϕ_1 — de l'angle droit sur le segment **BC**).

D'où la construction qui suit (voir figure 64):

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à h_b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et H_{b_1} (H_{b_2}) $\in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a. Si $t\,(u)$ est la droite définie par les points **C** et H_{b_1} (H_{b_2}), alors $\mathbf{A_1}$ ($\mathbf{A_2}$) $\in s \cap t\,(u)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

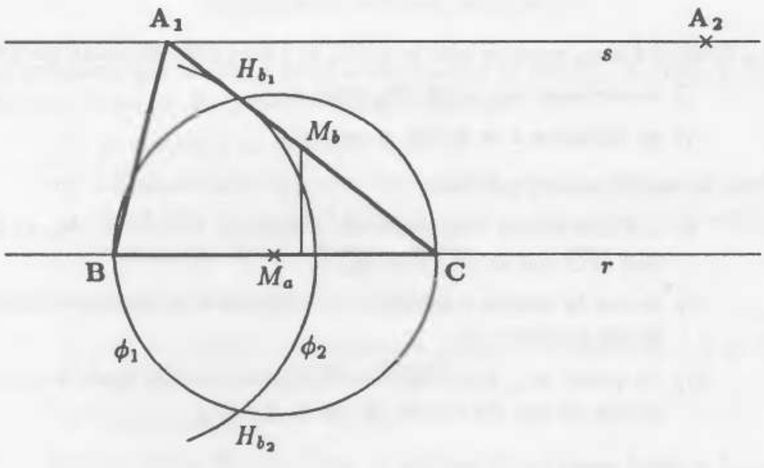


Figure 64

Exercice 142)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle \mathbf{BC}H_b$ et $\triangle \mathbf{BC}H_c$. La figure 64 nous montre que le point H_b (H_c) possède deux propriétés:

i) sa distance au point **B** (**C**) vaut h_b (h_c);

ii) un observateur placé en H_b (H_c) voit le segment **BC** selon un angle droit (H_b (H_c) appartient à l'arc capable — ϕ_1 — de l'angle droit sur le segment **BC**).

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point $\mathbf{B}\,(\mathbf{C})$, avec une ouverture de compas égale à $h_b\,(h_c)$, construire un arc de cercle $(\phi_2\,(\phi_3))$ et $H_{b_1}\,(H_{b_2}) \in \phi_1 \cap \phi_2$ et $H_c \in \phi_1 \cap \phi_3$;

iv) Si s est la droite définie par les points **B** et H_c et $t\,(u)$, celle définie par **C** et $H_{b_1}\,(H_{b_2})$, alors $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in s \cap t\,(u)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle \mathbf{A_2BC}$) solutions.

Exercice 143)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 64 nous montre que le point **A** ($\mathbf{A_1}$) possède deux propriétés:

i) sa distance au point M_a vaut m_a;

ii) sa distance à la droite r vaut h_a.

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B**, M_a et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$ et $\overline{M_a\mathbf{B}} = \overline{M_a\mathbf{C}}$;

ii) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a;

iii) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ) et $\mathbf{A} \in \phi \cap s$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 144)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathrm{BC}M_b$. La figure 64 nous montre que le point M_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point B vaut m_b;

ii) sa distance à la droite r vaut $h_a/2$.

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite r quelconque, placer les points B et C tels que $\overline{\mathrm{BC}} = a$;

ii) du point B, avec une ouverture de compas égale à m_b, construire un arc de cercle (ϕ);

iii) tracer la droite t parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur $h_a/2$, obtenant ainsi le point M_{b_1} (M_{b_2}) $(M_{b_1}\,(M_{b_2}) \in t \cap \phi)$;

iv) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a. Si $u\,(v)$ est la droite définie par les points C et M_{b_1} (M_{b_2}), alors $\mathrm{A}_1\,(\mathrm{A}_2) \in s \cap u\,(v)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathrm{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathrm{A_2BC}$) solutions.

Exercice 145)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathrm{BC}H_b$. La figure 64 nous montre que le point H_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point B vaut h_b;

ii) un observateur placé en H_b voit le segment BC selon un angle droit (H_b appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle droit sur le segment BC).

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite r quelconque, placer les points B, M_a et C tels que $\overline{\mathrm{BC}} = a$ et $\overline{M_a\mathrm{B}} = \overline{M_a\mathrm{C}}$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point B, avec une ouverture de compas égale à h_b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et H_{b_1} $(H_{b_2}) \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à m_a, construire un arc de cercle (ϕ_3). Si $s\,(t)$ est la droite définie par les points C et $H_{b_1}\,(H_{b_2})$, alors $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in s\,(t) \cap \phi_3$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

Exercice 146)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathbf{BC}H_b$. La figure 65 nous montre que le point H_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point B vaut h_b;

ii) un observateur placé en H_b voit le segment BC selon un angle droit (H_b appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle droit sur le segment BC).

D'où la construction qui suit (voir figure 65):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B et C tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$. Du point B, avec une ouverture de compas égale à h_b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $H_b \in \phi_1 \cap \phi_2$;

ii) du point B, avec une ouverture de compas égale à m_b, construire un arc de cercle (ϕ_3). Si s est la droite définie par les points C et H_b, alors $M_{b_1}\,(M_{b_2}) \in s \cap \phi_3$;

iii) du point $M_{b_1}\,(M_{b_2})$, avec une ouverture de compas égale à $\overline{M_{b_1}\mathbf{C}}\,(\overline{M_{b_2}\mathbf{C}})$, construire un arc de cercle ($\phi_4\,(\phi_5)$). Alors $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in s \cap \phi_4\,(\phi_5)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{A_1BC}$ et $\triangle\, \mathbf{A_2BC}$) solutions.

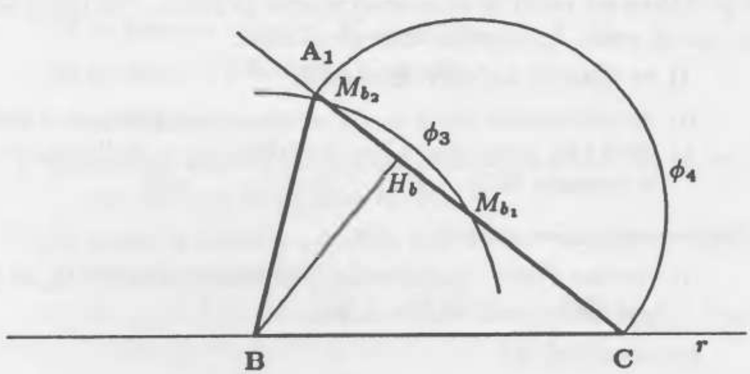


Figure 65

Exercice 147)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, BCH_b$ et le point M_c. La figure 66 nous montre que le point H_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point B vaut h_b;

ii) un observateur placé en H_b voit le segment BC selon un angle droit (H_b appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle droit sur le segment BC).

Quant au point M_c, il possède deux propriétés:

i) sa distance au point C vaut m_c;

ii) sa distance à la droite définie par les points C et H_b vaut $h_b/2$.

D'où la construction qui suit (voir figure 66):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B et C tels que $\overline{BC} = a$. Du point B, avec une ouverture de compas égale à h_b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $H_{b_1}\,(H_{b_2}) \in \phi_1 \cap \phi_2$;

ii) tracer la droite $u\,(v)$ parallèle à la droite définie par les points C et $H_{b_1}\,(H_{b_2})\,(s\,(t))$ et distante de celle-ci d'une longueur $\frac{h_b}{2}$;

iii) du point C, avec une ouverture de compas égale à m_c, construire un arc de cercle (ϕ_3) et $M_{c_1}\,(M_{c_2}) \in u\,(v) \cap \phi_3$;

iv) Si $w\,(z)$ est la droite définie par les points B et $M_{c_1}\,(M_{c_2})$, alors $\mathbf{A_1}\,(\mathbf{A_2}) \in w\,(z) \cap s\,(t)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{A_1}$BC et $\triangle\,\mathbf{A_2}$BC) solutions.

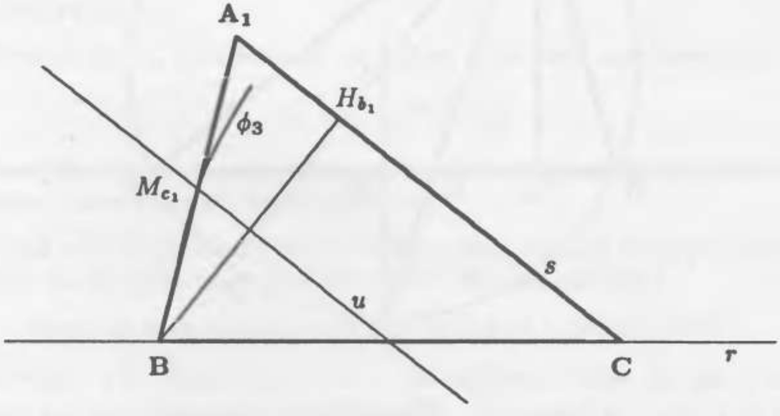


Figure 66

Exercice 148)

Méthode de la figure auxiliaire

Nous avons affirmé lors de la solution de l'exercice 54 que $\angle H_a\mathbf{A}S_a = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Nous avons le (voir figure 67) théorème suivant:

Théorème 12: ***Dans tout triangle, l'angle entre la hauteur et le diamètre du cercle circonscrit, menés du même sommet,***

i) ***est égal à la différence entre les deux autres angles du triangle;***

ii) ***a comme bissectrice la bissectrice intérieure menée du sommet considéré.***

Démonstration:

i)

Soient $\mathbf{A}H_a$ la hauteur issue du sommet **A** et $\mathbf{A}E$ le diamètre du cercle circonscrit au $\triangle$ **ABC** qui passe par le sommet **A** (voir la figure 67). Nous devons montrer que $\angle H_a\mathbf{A}E = \beta - \gamma$.

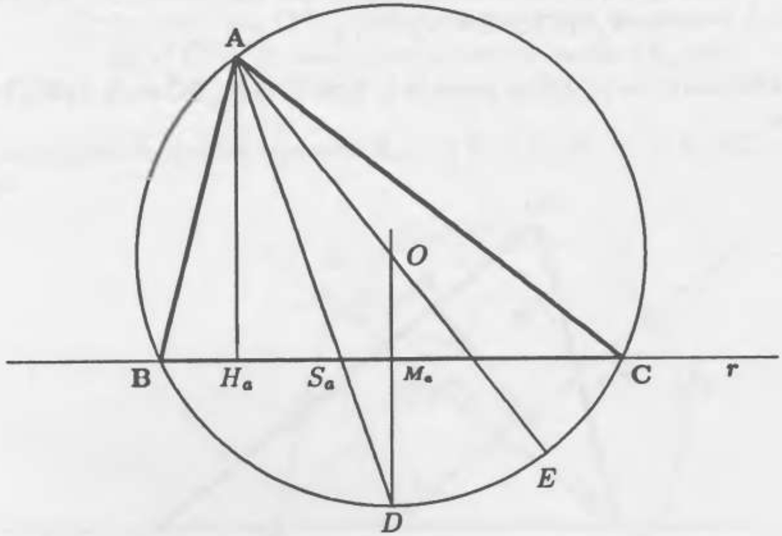


Figure 67

Les angles $\angle \mathbf{ABC}$ et $\angle \mathbf{A}E\mathbf{C}$ sont égaux parce que les angles inscrits dans un même segment circulaire $(\widehat{\mathbf{AC}})$ sont tous égaux.

Comme $\angle \mathbf{A}H_a\mathbf{B} = \angle \mathbf{AC}E = 90°$, nous concluons que $\angle \mathbf{BA}H_a = \angle \mathbf{CA}E = \theta = 90° - \beta$. Nous savons aussi que $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ et que $\alpha = \angle \mathbf{BAC}$. Nous pouvons écrire:

$$\angle H_a\mathbf{A}E = \alpha - 2\theta$$
$$\angle H_a\mathbf{A}E = 180° - \beta - \gamma - 2(90° - \beta)$$
$$\angle H_a\mathbf{A}E = \beta - \gamma. \quad \blacksquare$$

(le lecteur peut vérifier que la proposition demeure vraie si β ou γ est un angle obtus).

ii)

Soit $\mathbf{A}S_a$ la bissectrice intérieure issue du sommet $\mathbf{A}$. Nous devons montrer que $\angle H_a\mathbf{A}S_a = \angle E\mathbf{A}S_a$.

Comme $\angle \mathbf{BA}H_a = \angle \mathbf{CA}E$ et $\mathbf{A}S_a$ est la bissectrice de $\angle \mathbf{BAC}$, nous pouvons conclure que

$$\angle H_a\mathbf{A}S_a = \angle E\mathbf{A}S_a. \quad \blacksquare$$

Par conséquent, $\angle H_a\mathbf{A}S_a = \frac{1}{2}\angle H_a\mathbf{A}E = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ et nous avons le corollaire suivant:

Corollaire: *Dans le triangle rectangle* $\mathbf{A}H_aS_a$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$, $\overline{\mathbf{A}S_a} = s_a$ *et* $\angle H_a\mathbf{A}S_a = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, *i.e.,*

$$h_a,\ s_a \text{ et } \beta - \gamma$$

forment un datum.

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum aussi, nous concluons que

$$h_a,\ s_a,\ t_a \text{ et } \beta - \gamma$$

forment un datum, i.e., si nous connaissons deux de ces quatre grandeurs, les deux autres peuvent être déterminées.

Nous verrons plus tard des problèmes pour lesquels nous pouvons appliquer ces résultats (voir exercices 235 et 261, par exemple).

La figure 67 nous permet encore d'énoncer un autre théorème.

Théorème 13: *Dans tout triangle, la différence entre les deux angles formés par une bissectrice intérieure et le côté opposé est égale à la différence entre les angles adjacents à ce côté.*

Démonstration:

Nous devons montrer que $\angle \mathbf{A}S_a\mathbf{C} - \angle \mathbf{A}S_a\mathbf{B} = \beta - \gamma$.

Nous savons que (voir figure 67):

$$\angle \mathbf{A}S_a\mathbf{C} = \beta + \frac{\alpha}{2}$$
$$\angle \mathbf{A}S_a\mathbf{B} = \gamma + \frac{\alpha}{2}$$
$$\angle \mathbf{A}S_a\mathbf{C} - \angle \mathbf{A}S_a\mathbf{B} = \beta - \gamma. \quad \blacksquare$$

Avec le théorème 12 et la figure 45 (voir page 86), nous constatons que le problème est résolu si nous construisons $\triangle \mathbf{BC}E$ (figure auxiliaire). La figure 45 nous montre que le point **A** possède deux propriétés:

i) sa distance à la droite qui contient les points **B** et **C** vaut h_a;
ii) un observateur placé en **A** voit le segment $\mathbf{C}E$ selon un angle de $180° - 2\angle H_a\mathbf{A}S_a$ (**A** appartient à l'arc capable — ϕ — de l'angle $180° - 2\angle H_a\mathbf{A}S_a$ sur le segment $\mathbf{C}E$).

D'où la construction qui suit (voir figure 45):

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$. Construire le point E tel que $r \perp \mathbf{B}E$ et $\overline{\mathbf{B}E} = 2h_a$;
ii) tracer la droite s parallèle à la droite r et distante de celle-ci d'une longueur h_a;
iii) construire $\triangle \mathbf{A}H_aS_a$ (construction auxiliaire), obtenant l'angle $\angle H_a\mathbf{A}S_a$;
iv) construire ϕ et $\mathbf{A} \in s \cap \phi$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 149)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\cos\beta/2 = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} \tag{$*$}$$

$$h_a = c\sin\beta \Longrightarrow \sin\beta = \frac{h_a}{c} \tag{$**$}$$

$$s_b = \frac{2ac\cos\beta/2}{a+c}. \tag{$***$}$$

Avec $(*)$ et $(**)$ nous obtenons $\cos\beta/2 = \sqrt{(c \pm \sqrt{c^2 - h_a^2})/2c}$. $\quad (****)$

En remplaçant la valeur de $\cos\beta/2$ donnée par (****) dans (***), nous obtenons

$$c^4+\frac{4a(s_b^2-2a^2)}{s_b^2-4a^2}c^3+\frac{6s_b^4a^2-4s_b^2a^4+4h_a^2a^4}{(s_b^2-4a^2)s_b^2}c^2+ \\ +\frac{4s_b^2a^3}{s_b^2-4a^2}c+\frac{s_b^2a^4}{s_b^2-4a^2}=0. \qquad (\dagger)$$

Comme a, h_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre ($\dagger$) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation ($\dagger$) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

L'équation ($\dagger$) devient

$$c^4+\frac{730}{121}c^3-\frac{10115{,}25}{121}c^2-\frac{24000}{121}c-\frac{30000}{121}=0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant ($\ddagger$) avec Mathematica, nous obtenons $c = 8$ (seule racine positive). Comme $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$ et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$b_2 = \sqrt{129} = 11{,}357816\,7\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle dont les côtés sont (a, b_1, c) satisfait à toutes les conditions du problème et que b_2 est une solution étrangère.

Exercice 150)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 31). Nous avons vu lors de l'exercice 31 que nous devons résoudre l'équation

$$c^6-2b\cos\alpha c^5+\frac{b^2-b^2\cos^2\alpha-s_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4+\frac{2bs_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3+ \\ +\frac{s_b^2(s_b^2\cos^2\alpha-b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2-\frac{bs_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c+\frac{b^2s_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)}=0. \qquad (*)$$

Avec $\gamma = \gamma_1$, l'équation (*) appliquée à ce problème-ci devient

$$b^6 - 2a\cos\gamma_1 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_1 - s_a^2}{1-\cos^2\gamma_1}b^4 + \frac{2as_a^2\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b^3 + \\ + \frac{s_a^2(s_a^2\cos^2\gamma_1 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_1}b^2 - \frac{as_a^4\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b + \frac{a^2s_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_1)} = 0. \qquad (\dagger)$$

Comme $\cos\gamma_1$ ($\cos\gamma_1 = \frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}$), a et s_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir b.

Avec $\gamma = \gamma_2$, l'équation (*) appliquée à ce problème-ci devient

$$b^6 - 2a\cos\gamma_2 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_2 - s_a^2}{1-\cos^2\gamma_2}b^4 + \frac{2as_a^2\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b^3 + \\ + \frac{s_a^2(s_a^2\cos^2\gamma_2 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_2}b^2 - \frac{as_a^4\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b + \frac{a^2s_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_2)} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Comme $\cos\gamma_2$ ($\cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}$), a et s_a sont connus, nous pouvons résoudre (‡) avec Mathematica pour obtenir b. Cependant, puisque les coefficients de b^5, b^3 et b dans (†) et (‡) sont symétriques ($\cos\gamma_1 = -\cos\gamma_2$) et ceux de b^6, b^4, b^2 et b^0 (le terme indépendant) sont égaux, les racines de (†) et (‡) sont symétriques. Donc nous n'avons pas besoin de résoudre (‡).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}\,\text{cm}$ et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient ($\cos\gamma_1 = 1/7$)

$$b^6 - \frac{10}{7}b^5 - \frac{6273}{243}b^4 + \frac{17640}{243}b^3 - \frac{296156}{243}b^2 - \frac{439040}{243}b + \\ + \frac{3841600}{243} = 0. \qquad (\S)$$

Résolvant (§) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives et deux racines négatives (racines positives de (‡)), lesquelles sont montrées en bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$b_1 = \quad 7\,\text{cm} \implies c_1 = \sqrt{25 + b_1^2 - \frac{10}{7}b_1} = 8\,\text{cm}$$

$$b_2 = \quad 2{,}963542\,8\,\text{cm} \implies c_2 = 5{,}435894\,9\,\text{cm}$$

$$b_3' = -3{,}785304\,6\,\text{cm} \implies b_3 = -b_3' \text{ et } c_3 = \sqrt{25 + b_3^2 + \frac{10}{7}b_3} \approx 6{,}689\,\text{cm}$$

$$b_4' = -6{,}430429\,9\,\text{cm} \implies b_4 = -b_4' \text{ et } c_4 = 8{,}691188\,5\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles (a, b_1, c_1) et (a, b_4, c_4) satisfont à toutes les conditions du problème et que b_2 et b_3 sont des solutions étrangères.

Exercice 151)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 32).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 152)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et s_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 30).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 153)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous pouvons déterminer (construire) s_a. Nous connaissons donc a, h_a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 148).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 154)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\sin\beta = 2\sin\beta/2\cos\beta/2 \qquad (*)$$

$$h_a = c\sin\beta \Longrightarrow \sin\beta = \frac{h_a}{c} \qquad (**)$$

$$t_b = \frac{2ac\sin\beta/2}{|c-a|}. \qquad (***)$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons $\sin\beta/2 = \frac{h_a\sqrt{2c}}{2c\sqrt{c\pm\sqrt{c^2-h_a^2}}}$. $\qquad (****)$

En remplaçant la valeur de $\sin\beta/2$ donnée par $(****)$ dans $(***)$, nous obtenons

$$c^4 + \frac{4a(2a^2-t_b^2)}{t_b^2-4a^2}c^3 + \frac{6t_b^4a^2-4t_b^2a^4+4h_a^2a^4}{(t_b^2-4a^2)t_b^2}c^2 + \\ - \frac{4t_b^2a^3}{t_b^2-4a^2}c + \frac{t_b^2a^4}{t_b^2-4a^2} = 0. \qquad (\dagger)$$

Comme a, h_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^4 - \frac{230}{7}c^3 + \frac{2235{,}75}{7}c^2 - \frac{8000}{7}c + \frac{10000}{7} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant $(\ddagger)$ avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = \ 8\,\text{cm} \Longrightarrow b_1 = 7\,\text{cm} \quad (\cos\beta_1 = \frac{\sqrt{c_1^2-h_a^2}}{c_1})$$

$$c_2 = 19{,}0108804\,\text{cm} \Longrightarrow b_2 = 23{,}7370696\,\text{cm} \quad (\cos\beta_2 = -\frac{\sqrt{c_2^2-h_a^2}}{c_2}).$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles (a, b_1, c_1) et (a, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 155)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \operatorname{Arcsin}\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et t_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 36). Nous avons vu lors de l'exercice 36 que nous devons résoudre l'équation

$$c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - t_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2bt_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{t_b^2(t_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{bt_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2t_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0. \qquad (*)$$

Avec $\gamma = \gamma_1$, l'équation $(*)$ appliquée à ce problème-ci devient

$$b^6 - 2a\cos\gamma_1 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_1 - t_a^2}{1-\cos^2\gamma_1}b^4 + \frac{2at_a^2\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b^3 + \\ + \frac{t_a^2(t_a^2\cos^2\gamma_1 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_1}b^2 - \frac{at_a^4\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b + \frac{a^2t_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_1)} = 0. \qquad (\dagger)$$

Comme $\cos\gamma_1$ ($\cos\gamma_1 = \frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}$), a et t_a sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir b.

Avec $\gamma = \gamma_2$, l'équation $(*)$ appliquée à ce problème-ci devient

$$b^6 - 2a\cos\gamma_2 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_2 - t_a^2}{1-\cos^2\gamma_2}b^4 + \frac{2at_a^2\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b^3 + \\ + \frac{t_a^2(t_a^2\cos^2\gamma_2 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_2}b^2 - \frac{at_a^4\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b + \frac{a^2t_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_2)} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Comme $\cos\gamma_2$ ($\cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}$), a et t_a sont connus, nous pouvons résoudre $(\ddagger)$ avec Mathematica pour obtenir b. Cependant, puisque les coefficients de b^5, b^3 et b dans $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ sont symétriques ($\cos\gamma_1 = -\cos\gamma_2$) et ceux de b^6, b^4, b^2 et b^0 (le terme indépendant) sont égaux, les racines de $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ sont symétriques. Donc nous n'avons pas besoin de résoudre $(\ddagger)$.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}\,\text{cm}$ et $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient ($\cos\gamma_1 = 1/7$)

$$b^6 - \frac{10}{7}b^5 - 1347b^4 + 1960b^3 + 3332b^2 - 1317120b + 11524800 = 0. \quad (\S)$$

Résolvant (§) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives et deux racines négatives (racines positives de (‡)), lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$b_1 = \quad 36{,}9351246\,\text{cm} \implies c_1 = \sqrt{25 + b_1^2 - \frac{10}{7}b_1} = 36{,}5573380\,\text{cm}$$

$$b_2 = \quad 7\,\text{cm} \implies c_2 = 8\,\text{cm}$$

$$b_3' = -11{,}9765052\,\text{cm} \implies b_3 = -b_3' \text{ et } c_3 = \sqrt{25 + b_3^2 + \frac{10}{7}b_3} = \\ = 13{,}6215259\,\text{cm}$$

$$b_4' = -36{,}2273012\,\text{cm} \implies b_4 = -b_4' \text{ et } c_4 = 37{,}2715795\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles (a, b_2, c_2) et (a, b_3, c_3) satisfont à toutes les conditions du problème et que b_1 et b_4 sont des solutions étrangères.

Exercice 156)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \operatorname{Arcsin}\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et t_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 37).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 157)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \operatorname{Arcsin}\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et t_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 35).

Discussion: le problème possède 0, 1, 2, 3 ou 4 solutions.

Observation: pour une discussion plus poussée de ce problème, voir l'appendice.

Exercice 158)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et h_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 18).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 159)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et h_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 19).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 160)

Méthode du problème déjà résolu

Nous avons vu à l'exercice 66 que r, r_a, h_a forment un datum. Nous construisons alors r_a. À l'exercice 122, nous avons vu que a, R, $r_a - r$ forment un datum. Nous construisons R et nous connaissons donc a, h_a et R. Nous avons ainsi les données de l'exercice 158, déjà résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 161)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 41).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 162)

Méthode du problème déjà résolu

Nous avons vu à l'exercice 66 que r, r_a, h_a forment un datum. Nous construisons alors r. À l'exercice 122, nous avons vu que a, R, $r_a - r$ forment un datum. Nous construisons R et nous connaissons donc a, h_a et R. Nous avons ainsi les données de l'exercice 158, déjà résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 163)

Méthode du problème déjà résolu

Nous avons vu à l'exercice 69 que r_b, r_c, h_a forment un datum. Nous construisons alors r_c. À l'exercice 123, nous avons vu que a, R, $r_b + r_c$ forment un datum. Nous construisons R et nous connaissons donc a, h_a et R. Nous avons ainsi les données de l'exercice 158, déjà résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 164)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 45).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 165)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 46).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 166)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1.$$

Nous connaissons donc γ, a et r_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 44).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 167)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\,\mathbf{B}\mathbf{C}G$ où, comme vu dans l'exercice 73, G est le point commun des trois médianes du triangle. Une analyse§ de la figure 68 nous montre que le point G possède deux propriétés:

i) sa distance au point B vaut $\frac{1}{3}2m_b$;
ii) sa distance au point M_a vaut $\frac{1}{3}m_a$.

D'où la construction qui suit (voir figure 68):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B, M_a et C tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$ et $\overline{M_a\mathbf{B}} = \overline{M_a\mathbf{C}}$;
ii) du point B, avec une ouverture de compas égale à $\frac{1}{3}2m_b$, construire un arc de cercle (ϕ_1);
iii) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à $\frac{1}{3}m_a$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $G \in \phi_1 \cap \phi_2$;
iv) si s est la droite définie par les points M_a et G, placer A sur s tel que $\overline{M_a\mathbf{A}} = m_a$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

---

§ Voir [1] ou [19], par exemple.

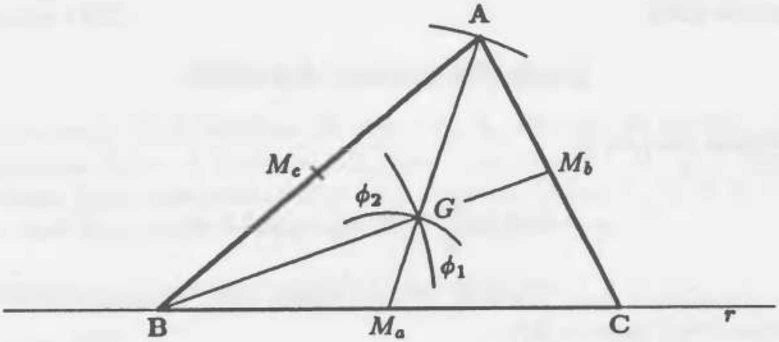


Figure 68

Exercice 168)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous construisons $\triangle\,\mathrm{BC}G$. Une analyse de la figure 68 nous montre que le point G possède deux propriétés:

i) sa distance au point B vaut $\frac{1}{3}2m_b$;

ii) sa distance au point C vaut $\frac{1}{3}2m_c$.

D'où la construction qui suit (voir figure 68):

i) sur une droite r quelconque, placer les points B, M_a et C tels que $\overline{\mathrm{BC}} = a$ et $\overline{M_a\mathrm{B}} = \overline{M_a\mathrm{C}}$;

ii) du point B, avec une ouverture de compas égale à $\frac{1}{3}2m_b$, construire un arc de cercle (ϕ_1);

iii) du point C, avec une ouverture de compas égale à $\frac{1}{3}2m_c$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $G \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iv) si s est la droite définie par les points M_a et G, placer A sur s tel que $\overline{G\mathrm{A}} = 2\overline{GM_a}$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 169)

Méthode de la figure auxiliaire

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \qquad (*)$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2. \qquad (**)$$

Nous appelons

$$\left.\begin{aligned} b^2+c^2 &= q^2 \\ bc &= \ell^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (b+c)^2 = q^2+2\ell^2 \therefore b+c = \sqrt{q^2+2\ell^2} = s.$$

Pour trouver b et c nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} b+c = \sqrt{q^2+2\ell^2} = s \\ bc = \ell^2 \end{cases}$$

Par conséquent, b et c pourront être obtenus graphiquement si nous pouvons construire q^2 et ℓ^2.

De $(*)$, nous tirons

$$b^2+c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = q^2.$$

De $(**)$, nous tirons

$$\ell^2 - \frac{a^2\ell^2}{q^2+2\ell^2} = s_a^2$$

$$(\ell^2)^2 + \frac{1}{4}(4m_a^2 - 4s_a^2 - a^2)\ell^2 - \frac{1}{4}(4m_a^2+a^2)s_a^2 = 0. \qquad (\dagger)$$

Donc q^2 et ℓ^2 peuvent être construits!

Application numérique: soient $a = 5$ cm, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

Évidemment, les constructions avec règle et compas pour obtenir q^2 et ℓ^2 sont longues et introduiront des imprécisions (erreurs de construction). Nous allons plutôt calculer q^2 et ℓ^2 algébriquement.

Avec les données, nous obtenons $q^2 = 113$ et l'équation (†) devient:

$$(\ell^2)^2 - \frac{52}{9}\ell^2 - \frac{25312}{9} = 0 \implies \ell^2 = 56.$$

Ayant calculé q^2 et ℓ^2, la détermination de b et c est immédiate:

$$\begin{cases} b + c = \sqrt{q^2 + 2\ell^2} = s = 15 \\ bc = \ell^2 = 56 \end{cases} \qquad (\ddagger)$$

Algébriquement, nous obtenons

$$b^2 - 15b + 56 = 0 \implies \begin{cases} b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_1 = 8\,\text{cm} \\ b_2 = 8\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_2 = 7\,\text{cm}. \end{cases}$$

Pour résoudre graphiquement le système (‡), nous construisons la figure auxiliaire suivante (voir figure 69):

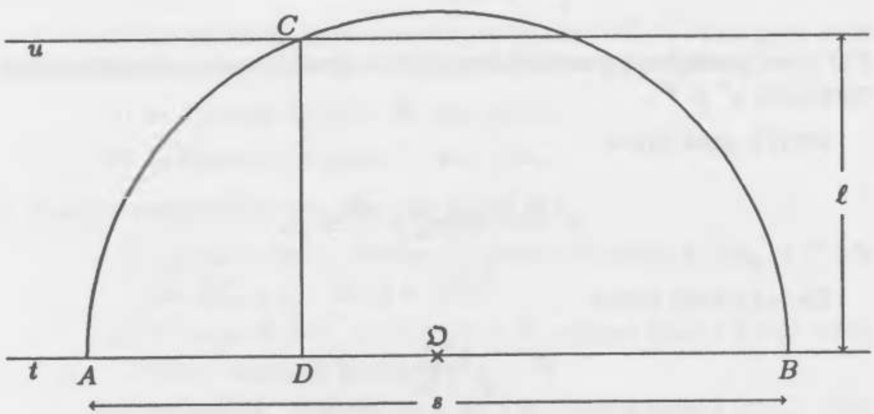


Figure 69

$\overline{DA} = b \qquad \overline{DB} = c$

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 170)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=m_a \tag{$*$}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \tag{$**$}$$

De $(*)$, nous obtenons $b^2=\dfrac{a^2+4m_a^2}{2}-c^2$. $\qquad (***)$

En remplaçant la valeur de b^2 donnée par $(***)$ dans $(**)$, nous obtenons

$$c^3+\left(a-\frac{s_b^2}{2a}\right)c^2+\left(\frac{a^2}{4}-m_a^2-s_b^2\right)c-\frac{as_b^2}{2}=0. \tag{$\dagger$}$$

Comme a, m_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a=5\,\text{cm}$, $m_a=\frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $s_b=\frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^3+\frac{365}{169}c^2-\frac{12236}{169}c-\frac{12000}{169}=0. \tag{$\ddagger$}$$

Résolvant $(\ddagger)$ avec Mathematica, nous obtenons $c=8\,\text{cm}$ et, avec $(***)$, $b=7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a,b,c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Discussion: une analyse de $(\dagger)$ nous montrera que cette équation possède au plus une racine positive. Donc, le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 171)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}=m_b \tag{$*$}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \tag{$**$}$$

De $(*)$, nous obtenons $b^2=2(c^2+a^2-2m_b^2)$. $\qquad (***)$

En remplaçant la valeur de b^2 donnée par (***) dans (**), nous obtenons

$$2(c^2+a^2-2m_b^2)c^2 = \left[\frac{4c^4+(4a^2-8m_b^2-3s_a^2)c^2+2(2m_b^2-a^2)s_a^2}{3c^2+a^2-4m_b^2-2s_a^2}\right]^2. \quad (\dagger)$$

Comme a, m_b et s_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$x^4 - 347{,}50x^3 + \frac{2164390}{81}x^2 - \frac{34676576}{81}x - \frac{626296832}{81} = 0, \quad (\ddagger)$$

où $x = c^2$.

Nous pouvons constater que $x = 64$ est une racine de (‡). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 172)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \quad (*)$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \quad (**)$$

De (*), nous obtenons $b^2 = 2(c^2+a^2-2m_b^2)$. (***)

En remplaçant la valeur de b^2 donnée par (***) dans (**), nous obtenons

$$c^3 + \left(\frac{s_b^2}{a} - 2a\right)c^2 + (a^2+2s_b^2-4m_b^2)c + as_b^2 = 0. \quad (\dagger)$$

Comme a, m_b et s_b sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^3 - \frac{730}{169}c^2 - \frac{7976}{169}c + \frac{24000}{169} = 0. \tag{‡}$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$c_2 = 2{,}757365\,9\,\text{cm} \implies b_2^2 < 0 \quad \text{(solution étrangère).}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b_1, c_1) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 173)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{$*$}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = s_c^2 \tag{$**$}$$

De $(*)$, nous obtenons $c^2 = \dfrac{b^2}{2} - a^2 + 2m_b^2$. $\quad (***)$

En remplaçant la valeur de c^2 donnée par $(***)$ dans $(**)$, nous obtenons

$$b^3 + \left(4a - 2\frac{s_c^2}{a}\right)b^2 + 4(a^2 - m_b^2 - s_c^2)b - 2as_c^2 = 0. \tag{†}$$

Comme a, m_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir b.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $s_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$b^3 + \frac{110}{9}b^2 - \frac{961}{9}b - \frac{1750}{9} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons $b = 7\,\text{cm}$ et $c = 8\,\text{cm}$ (avec (***)).

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Discussion: une analyse de (†) nous montrera que cette équation possède au plus une racine positive. Donc, le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 174)

Méthode de la figure auxiliaire

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \qquad (*)$$

$$\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 - 1\right]bc = t_a^2. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2 + 4m_a^2}{2} \qquad (***)$$

$$bc[2bc + a^2 - (b^2 + c^2)] = t_a^2(b-c)^2. \qquad (****)$$

Nous appelons, comme dans l'exercice 169,

$$\left.\begin{aligned} b^2 + c^2 &= q^2 \\ bc &= \ell^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (b-c)^2 = q^2 - 2\ell^2 \therefore |b-c| = \sqrt{q^2 - 2\ell^2} = d.$$

Pour trouver b et c (où nous supposerons $b < c$), nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} c - b = \sqrt{q^2 - 2\ell^2} = d \\ bc = \ell^2 \end{cases}$$

Par conséquent, b et c pourront être obtenus graphiquement si nous pouvons construire q^2 et ℓ^2.

De (***), nous tirons

$$q^2 = \frac{a^2 + 4m_a^2}{2}.$$

De (****), nous tirons

$$\ell^2(2\ell^2 + a^2 - q^2) = t_a^2(q^2 - 2\ell^2)$$

$$(\ell^2)^2 + \frac{1}{4}(4t_a^2 - 4m_a^2 + a^2)\ell^2 - \frac{1}{4}(4m_a^2 + a^2)t_a^2 = 0. \tag{†}$$

Donc q^2 et ℓ^2 peuvent être construits!

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Évidemment, les constructions avec règle et compas pour obtenir q^2 et ℓ^2 sont longues et introduiront des imprécisions (erreurs de construction). Nous allons plutôt calculer q^2 et ℓ^2 algébriquement.

Avec les données, nous obtenons $q^2 = 113$ et l'équation (†) devient:

$$(\ell^2)^2 + 1300\ell^2 - 75936 = 0 \implies \ell^2 = 56.$$

Ayant calculé q^2 et ℓ^2, la détermination de b et c est immédiate:

$$\begin{cases} c - b = \sqrt{q^2 - 2\ell^2} = d = 1 \\ \quad bc = \ell^2 = 56 \end{cases} \tag{‡}$$

Algébriquement, nous obtenons

$$b^2 + b - 56 = 0 \implies b = 7\,\text{cm et } c = 8\,\text{cm}.$$

Pour résoudre graphiquement le système (‡), nous construisons la figure auxiliaire suivante (voir figure 70):

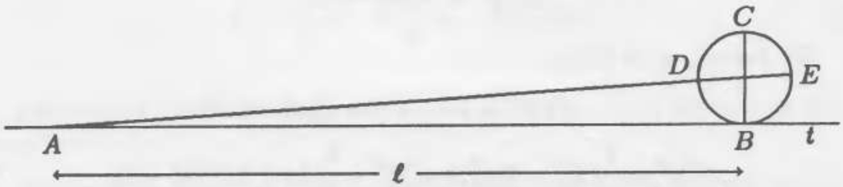


Figure 70

$\overline{BC} = d$

$\overline{AD} = b \qquad \overline{AE} = c$

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 175)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{$*$}$$

$$\Big[\Big(\frac{b}{a-c}\Big)^2 - 1\Big]ac = t_b^2. \tag{$**$}$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = \frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 \tag{$***$}$$

$$ac[b^2 + 2ac - (a^2+c^2)] = t_b^2(a-c)^2. \tag{$****$}$$

En remplaçant la valeur de b^2 donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$c^3 + \Big(\frac{t_b^2}{2a} - a\Big)c^2 + \Big(\frac{a^2}{4} - m_a^2 - t_b^2\Big)c + \frac{at_b^2}{2} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Comme a, m_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^3 + \frac{115}{9}c^2 - \frac{1996}{9}c + \frac{4000}{9} = 0. \tag{‡}$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm} \quad (\text{avec } (***))$$

$$c_2 = 2{,}397219\,5\,\text{cm} \implies b_2 = 10{,}356318\,8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b_1, c_1) satisfait à toutes les conditions du problème et que c_2 est une solution étrangère parce que $b_2 > a + c_2$.

Exercice 176)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = m_b \tag{*}$$

$$bc[a^2 + 2bc - (b^2 + c^2)] = t_a^2(b - c)^2 \tag{**}$$

De (*), nous obtenons $b^2 = 2(c^2 + a^2 - 2m_b^2)$. (***)

En remplaçant la valeur de b^2 donnée par (***) dans (**), nous obtenons

$$2(c^2 + a^2 - 2m_b^2)c^2 = \left[\frac{4c^4 + (4a^2 - 8m_b^2 - 3t_a^2)c^2 + 2(2m_b^2 - a^2)t_a^2}{3c^2 + a^2 - 4m_b^2 - 2t_a^2}\right]^2. \tag{†}$$

Comme a, m_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$x^4 - 347{,}50x^3 - 745786x^2 + 136964512x - 5636671488 = 0, \tag{‡}$$

où $x = c^2$.

Nous pouvons constater que $x = 64$ est une racine de (‡). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 177)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \qquad (*)$$

$$ac[b^2+2ac-(a^2+c^2)] = t_b^2(a-c)^2 \qquad (**)$$

De $(*)$, nous obtenons $b^2 = 2(c^2+a^2-2m_b^2)$. $\qquad (***)$

En remplaçant la valeur de b^2 donnée par $(***)$ dans $(**)$, nous obtenons

$$c^3 + \left(2a - \frac{t_b^2}{a}\right)c^2 + (a^2 - 4m_b^2 + 2t_b^2)c - at_b^2 = 0. \qquad (\dagger)$$

Comme a, m_b et t_b sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^3 - \frac{230}{9}c^2 + \frac{2264}{9}c - \frac{8000}{9} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant $(\ddagger)$ avec Mathematica, nous obtenons une racine positive ($c = 8\,\text{cm} \implies b = 7\,\text{cm}$) et deux racines complexes.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 178)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \qquad (*)$$

$$\left[\left(\frac{c}{b-a}\right)^2 - 1\right]ab = t_c^2. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$c^2 = \frac{b^2}{2} - a^2 + 2m_b^2 \qquad (***)$$

$$ab[c^2 + 2ab - (a^2 + b^2)] = t_c^2(b - a)^2. \qquad (****)$$

En remplaçant la valeur de c^2 donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$b^3 + \left(2\frac{t_c^2}{a} - 4a\right)b^2 + 4(a^2 - m_b^2 - t_c^2)b + 2at_c^2 = 0. \qquad (\dagger)$$

Comme a, m_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir b.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $t_c = 5\sqrt{21}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$b^3 + 190b^2 - 2129b + 5250 = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$b_1 = 7\,\text{cm} \implies c_1 = 8\,\text{cm} \quad (\text{avec } (***))$$

$$b_2 = 3{,}736246\,0\text{cm} \implies c_2 = 6{,}817607\,1\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles (a, b_1, c_1) et (a, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Discussion: une analyse de (†) nous montrera que cette équation possède au plus deux racines positives. Donc, le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 179)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et m_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 23).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 180)

Premier procédé - Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et m_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 24).

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

La figure 23 à la page 53 nous montre que le point M_b possède deux propriétés:

i) sa distance au point **B** vaut m_b;
ii) un observateur placé en M_b voit le segment O**C** selon un angle droit (M_b appartient à l'arc capable—ϕ_3—de l'angle droit sur le segment O**C**).

D'où la construction qui suit (voir figure 23):

i) sur une droite r quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;
ii) construire le centre O du cercle circonscrit (O possède deux propriétés: O appartient à la médiatrice du segment **BC** et $\overline{\mathbf{B}O} = R$);
iii) construire le segment O**C** et ϕ_3 (l'arc capable de l'angle droit sur le segment O**C**);
iv) du point **B**, avec une ouverture de compas égale à m_b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $M_b \in \phi_2 \cap \phi_3$;
v) si s est la droite définie par les points **C** et M_b et ϕ_1, le cercle circonscrit, alors $\mathbf{A} \in s \cap \phi_1$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 181)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \qquad (*)$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = r, \quad \text{où } p = \frac{a+b+c}{2}. \qquad (**)$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = \frac{a^2 + 4m_a^2}{2} - c^2 \qquad (***)$$

$$[(c-a)^2 - b^2 - 4r^2]b =$$
$$= c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$\frac{a^2 + 4m_a^2}{2} - c^2 = \left[\frac{2c^3 + (4r^2 - 2m_a^2 - 3a^2/2)c + 4ar^2 + a^3/2 - 2am_a^2}{2c^2 - 2ac + a^2/2 - 2m_a^2 - 4r^2}\right]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, m_a et r sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^6 - 5c^5 - 157c^4 + 625c^3 + 7472c^2 - 16280c - 123200 = 0. \qquad (\ddagger)$$

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de $(\ddagger)$. Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec $(***)$, $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 182)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = m_b \qquad (*)$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = r, \quad \text{où } p = \frac{a+b+c}{2}. \qquad (**)$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = 2(a^2 + c^2) - 4m_b^2 \qquad (***)$$

$$[(c-a)^2 - b^2 - 4r^2]b =$$
$$= c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$2(a^2+c^2)-4m_b^2 = \left[\frac{c^3+3ac^2+(3a^2-4m_b^2-4r^2)c+(a^2-4m_b^2-4r^2)a}{c^2+2ac+a^2-4m_b^2+4r^2}\right]^2. \quad (\dagger)$$

Comme a, m_b et r sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^6 + 10c^5 - 340c^4 - 2120c^3 + 36608c^2 + 68800c - 1005056 = 0. \quad (\ddagger)$$

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (‡). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 183)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \quad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = r_a, \quad \text{où } p = \frac{a+b+c}{2}. \quad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 \quad (***)$$

$$[(c+a)^2 - b^2 - 4r_a^2]b = \\ = c^3 + ac^2 + (a-c)b^2 + (4r_a^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a. \quad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 = \left[\frac{4c^3+(8r_a^2-3a^2-4m_a^2)c+(4m_a^2-a^2-8r_a^2)a}{4c^2+4ac+a^2-4m_a^2-8r_a^2}\right]^2. \quad (\dagger)$$

Comme a, m_a et r_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^6 + 5c^5 - 157c^4 - 805c^3 + 9596c^2 + 33920c - 256256 = 0. \qquad (‡)$$

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (‡). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 184)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b} = r_b. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 \qquad (***)$$

$$[b^2 - (c-a)^2 + 4r_b^2]b =$$
$$= c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r_b^2 - a^2)c + (a^2+4r_b^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 = \left[\frac{4c^3 + (8r_b^2 - 3a^2 - 4m_a^2)c + (8r_b^2 - 4m_a^2 + a^2)a}{4c^2 - 4ac + a^2 - 4m_a^2 - 8r_b^2}\right]^2. \qquad (†)$$

Comme a, m_a et r_b sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^6 - 5c^5 - 157c^4 + \frac{1}{9}\Big(11085c^3 + 154972c^2 - 565120c - 6169856\Big) = 0. \quad (‡)$$

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (‡). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 185)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \quad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = r_a. \quad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = 2(a^2+c^2) - 4m_b^2 \quad (***)$$

$$[(c+a)^2 - b^2 - 4r_a^2]b = \\ = c^3 + ac^2 + (a-c)b^2 + (4r_a^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a. \quad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$2(a^2+c^2) - 4m_b^2 = \left[\frac{c^3 - 3ac^2 + (3a^2 - 4m_b^2 - 4r_a^2)c + (4r_a^2 + 4m_b^2 - a^2)a}{c^2 - 2ac + a^2 - 4m_b^2 + 4r_a^2}\right]^2. \quad (†)$$

Comme a, m_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$c^6 - 10c^5 - 124c^4 - 760c^3 + 19616c^2 + 66560c - 825344 = 0. \quad (‡)$$

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (‡). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 186)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b} = r_b. \qquad (**)$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = 2(a^2+c^2) - 4m_b^2 \qquad (***)$$

$$[b^2-(c-a)^2+4r_b^2]b = \\ = c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r_b^2 - a^2)c + (a^2+4r_b^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$2(a^2+c^2)-4m_b^2 = \left[\frac{c^3+3ac^2+(3a^2-4m_b^2-4r_b^2)c+(a^2-4m_b^2-4r_b^2)a}{c^2+2ac+a^2-4m_b^2+4r_b^2}\right]^2. \quad (\dagger)$$

Comme a, m_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^6+10c^5+388c^4+\frac{1}{9}\Big(68280c^3-92768c^2-4418560c-13285376\Big) = 0. \quad (\ddagger)$$

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de $(\ddagger)$. Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec $(***)$, $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 187)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-c} = r_c. \qquad (**)$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = 2(a^2+c^2) - 4m_b^2 \qquad (***)$$

$$[b^2-(c+a)^2+4r_c^2]b = \\ = c^3+ac^2+(a-c)b^2+(4r_c^2-a^2)c-(a^2+4r_c^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$2(a^2+c^2)-4m_b^2 = \left[\frac{c^3-3ac^2+(3a^2-4m_b^2-4r_c^2)c+(4m_b^2+4r_c^2-a^2)a}{c^2-2ac+a^2-4m_b^2+4r_c^2}\right]^2. \quad (\dagger)$$

Comme a, m_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation $(\dagger)$ devient

$$c^6-10c^5+1388c^4-20920c^3-26752c^2+1739840c-7115264=0. \quad (\ddagger)$$

Nous pouvons constater que $c=8$ est une racine de $(\ddagger)$. Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec $(***)$, $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a,b,c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 188)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{$*$}$$

$$ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = s_b^2. \tag{$**$}$$

Avec ($**$) et ($*$), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \tag{$***$}$$

$$c[c^2 + b^2 - a^2 - 2s_a^2]b = s_a^2c^2 + (s_a^2 - 2c^2)b^2. \tag{$****$}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par ($***$) dans ($****$), nous obtenons

$$\frac{c}{a}(ac - s_b^2)(a+c)^2 = \left[\frac{as_a^2c^3 + s_a^2(ac - s_b^2)(a+c)^2 - 2(ac - s_b^2)(a+c)^2c^2}{ac^3 + (ac - s_b^2)(a+c)^2 - a(a^2 + 2s_a^2)c}\right]^2. \tag{$\dagger$}$$

Comme a, s_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre ($\dagger$) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation ($\dagger$) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ et $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de ($\dagger$). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec ($***$), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 189)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{$*$}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = s_c^2. \tag{$**$}$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$a[b^2 + a^2 - c^2 - 2s_c^2]b = (s_c^2 - 2a^2)b^2 + a^2 s_c^2. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{a}{c}(ac - s_b^2)(a+c)^2 = \left[\frac{(s_c^2 - 2a^2)(ac - s_b^2)(a+c)^2 + a^3 s_c^2 c}{ac^3 - (ac - s_b^2)(a+c)^2 - a(a^2 - 2s_c^2)c}\right]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, s_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $s_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 190)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons a, h_a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 148).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 191)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \qquad (*)$$

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2. \qquad (**)$$

Avec (**) et (*), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac+t_b^2)(a-c)^2}{ac} \tag{***}$$

$$c[c^2+b^2-a^2-2s_a^2]b = s_a^2c^2+(s_a^2-2c^2)b^2. \tag{****}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{c}{a}(ac+t_b^2)(a-c)^2 = \left[\frac{as_a^2c^3+(s_a^2-2c^2)(ac+t_b^2)(a-c)^2}{ac^3+(ac+t_b^2)(a-c)^2-a(a^2+2s_a^2)c}\right]^2. \tag{†}$$

Comme a, s_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 192)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{*}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 - 1\right]bc = t_a^2. \tag{**}$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac-s_b^2)(a+c)^2}{ac} \tag{***}$$

$$c[c^2+b^2-a^2-2t_a^2]b = (2c^2-t_a^2)b^2-t_a^2c^2. \tag{****}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{c}{a}(ac-s_b^2)(a+c)^2 = \left[\frac{[ac^3+(ac-s_b^2)(a+c)^2]t_a^2-2(ac-s_b^2)(a+c)^2c^2}{ac^3+(ac-s_b^2)(a+c)^2-a(a^2+2t_a^2)c}\right]^2. \tag{†}$$

Comme a, s_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ et $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 193)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, s_b et t_b forment un datum, nous connaissons a, h_b et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 151).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 194)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{$*$}$$

$$\left[\left(\frac{c}{b-a}\right)^2 - 1\right]ab = t_c^2. \tag{$**$}$$

Avec ($*$) et ($**$), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \tag{$***$}$$

$$a[c^2 - b^2 - a^2 + 2t_c^2]b = a^2t_c^2 + (t_c^2 - 2a^2)b^2. \tag{$****$}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par ($***$) dans ($****$), nous obtenons

$$\frac{a}{c}(ac - s_b^2)(a+c)^2 = \left[\frac{a^3t_c^2c + (t_c^2 - 2a^2)(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac^3 - (ac - s_b^2)(a+c)^2 - a(a^2 - 2t_c^2)c}\right]^2. \tag{†}$$

Comme a, s_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm et $t_c = 5\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 195)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 28).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 196)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 29).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 197)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \qquad (*)$$

$$\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = s_a \implies bc = \frac{(b+c)s_a}{2\cos\alpha/2} \qquad (**)$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r}{p-a} \implies \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}}{\cos\alpha/2} = \frac{2r}{b+c-a}. \qquad (***)$$

De (***), nous obtenons $b + c = a + \dfrac{2r\cos\alpha/2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}}$. $\qquad$ (****)

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2.$$

Comme $1+\cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2$, et avec (**), l'équation ci-dessus devient

$$(b+c)^2 - 2s_a(b+c)\cos\alpha/2 = a^2,$$

ou, avec (****),

$$x^4 - \frac{4ar^2s_a}{(a^2+4r^2)s_a^2}x^3 + \frac{4(a^2+r^2-s_a^2)r^2 - 2a^2s_a^2}{(a^2+4r^2)s_a^2}x^2 + \frac{4ar^2s_a}{(a^2+4r^2)s_a^2}x + \\ + \frac{(s_a^2-4r^2)a^2}{(a^2+4r^2)s_a^2} = 0, \qquad (\dagger)$$

où $x = \cos\alpha/2$.

Comme a, s_a et r sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir x.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$x^4 - \frac{45\sqrt{7}}{518}x^3 - \frac{773{,}50}{518}x^2 + \frac{45\sqrt{7}}{518}x + \frac{265{,}625}{518} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$x_1 = 0{,}944911\,2 \implies b_1 = 7\,\text{cm} \;\text{ et }\; c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$x_2 = 0{,}889627\,7 \quad \text{(solution étrangère).}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b_1, c_1) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 198)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = s_b^2 \qquad (*)$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = r. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$[c^2 - b^2 + a^2 - 2ac - 4r^2]b =$$
$$= c^3 - ac^2 - (c+a)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} = \Bigg[\frac{1}{a(c^2 - 2ac - 4r^2 + a^2)c - (ac - s_b^2)(a+c)^2}\Big(ac^4 - a^2c^3 +$$
$$+ [a^4 + 4a^2r^2 + (4r^2 - a^2)ac - (ac - s_b^2)(a+c)^2]c - a(ac - s_b^2)(a+c)^2\Big)\Bigg]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, s_b et r sont connus, nous pouvons résoudre ($\dagger$) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation ($\dagger$) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de ($\dagger$). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 199)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \qquad (*)$$

$$\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = s_a \implies bc = \frac{(b+c)s_a}{2\cos\alpha/2} \qquad (**)$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r_a}{p} \implies \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}}{\cos\alpha/2} = \frac{2r_a}{a+b+c}. \qquad (***)$$

De (***), nous obtenons $b + c = \dfrac{2r_a\cos\alpha/2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}} - a.$ (****)

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2.$$

Comme $1+\cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2$, et avec (**), l'équation ci-dessus devient

$$(b+c)^2 - 2s_a(b+c)\cos\alpha/2 = a^2,$$

ou, avec (****),

$$x^4 + \frac{4ar_a^2 s_a}{(a^2+4r_a^2)s_a^2}x^3 + \frac{4(a^2+r_a^2-s_a^2)r_a^2 - 2a^2s_a^2}{(a^2+4r_a^2)s_a^2}x^2 - \frac{4ar_a^2 s_a}{(a^2+4r_a^2)s_a^2}x + \\ + \frac{(s_a^2-4r_a^2)a^2}{(a^2+4r_a^2)s_a^2} = 0, \qquad (\dagger)$$

où $x = \cos\alpha/2$.

Comme a, s_a et r_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir x.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$x^4 + \frac{90\sqrt{7}}{511}x^3 - \frac{436{,}25}{511}x^2 - \frac{90\sqrt{7}}{511}x + \frac{6{,}25}{511} = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$x_1 = 0{,}944\,911\,2 \implies b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$x_2 = 0{,}025\,109\,1 \quad \text{(solution étrangère)}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b_1, c_1) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 200)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \qquad (*)$$

$$\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b} = r_b^2. \qquad (**)$$

Nous écrivons (*) et (**) comme

$$b^3 + \Big(2c - \frac{s_a^2}{c}\Big)b^2 + (c^2 - a^2 - 2s_a^2)b - s_a^2 c = 0 \qquad (***)$$

$$b^3 + (a+c)b^2 - [(c-a)^2 - 4r_b^2]b - (c-a)c^2 + \\ + (a^2 - 4r_b^2)c - (a^2 + 4r_b^2)a = 0. \qquad (****)$$

Comme a, s_a et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (***)-(****), obtenant ainsi les côtés b et c du triangle.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Avec ces valeurs, Mathematica nous donne

$$b = 7\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c = 8\,\text{cm}.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 201)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$ac - \frac{b^2 ac}{(a+c)^2} = s_b^2 \qquad (*)$$

$$\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a} = r_a^2. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$[b^2 - (c+a)^2 + 4r_a^2]b = \\ = (c-a)b^2 - (c+a)c^2 + (a^2 - 4r_a^2)c + (a^2 + 4r_a^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} = \\ = \Big[\frac{(c-a)(ac - s_b^2)(a+c)^2 - a[(c+a)c^2 - (a^2 - 4r_a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a]c}{(ac - s_b^2)(a+c)^2 + a[4r_a^2 - (c+a)^2]c}\Big]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, s_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 202)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{*}$$

$$\frac{2ac\cos\beta/2}{a+c} = s_b \implies \cos\beta/2 = \frac{(a+c)s_b}{2ac} \tag{**}$$

$$\tan\beta/2 = \frac{r_b}{p} \implies \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta/2}}{\cos\beta/2} = \frac{2r_b}{a+b+c}. \tag{***}$$

De (***), nous obtenons $b = \dfrac{2r_b\cos\beta/2}{\sqrt{1-\cos^2\beta/2}} - (a+c).$ $\qquad$ (****)

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(a+c)^2 - 2ac(1+\cos\beta) = b^2.$$

Comme $1 + \cos\beta = 2\cos^2\beta/2$, et avec (**) et (****), l'équation ci-dessus devient

$$4a^2r_b(a+c)c^2\sqrt{(2ac)^2-(a+c)^2s_b^2} =$$
$$= 4a^2r_b^2s_b(a+c)c^2 + as_b(a+c)[(2ac)^2-(a+c)^2s_b^2]c. \tag{†}$$

Comme a, s_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (**) et (****), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 203)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{$*$}$$

$$\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c} = r_c^2. \tag{$**$}$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \tag{$***$}$$

$$[b^2 - (c+a)^2 + 4r_c^2]b =$$
$$= (c+a)c^2 - (c-a)b^2 - (a^2 - 4r_c^2)c - (a^2 + 4r_c^2)a. \tag{$****$}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$\frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} =$$
$$= \left[\frac{a[(c+a)c^2 - (a^2 - 4r_c^2)c - (a^2 + 4r_c^2)a]c - (c-a)(ac - s_b^2)(a+c)^2}{(ac - s_b^2)(a+c)^2 + a[4r_c^2 - (c+a)^2]c}\right]^2. \tag{$\dagger$}$$

Comme a, s_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $s_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ et $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de $(\dagger)$. Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec $(***)$, $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 204)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 - 1\right]bc = t_a^2 \tag{$*$}$$

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2. \tag{$**$}$$

Avec (**) et (*), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac+t_b^2)(c-a)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$c[a^2 - b^2 - c^2 + 2t_a^2]b = t_a^2c^2 + (t_a^2 - 2c^2)b^2. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{c}{a}(ac+t_b^2)(c-a)^2 = \left[\frac{at_a^2c^3 + t_a^2(ac+t_b^2)(c-a)^2 - 2(ac+t_b^2)(c-a)^2c^2}{ac^3 + (ac+t_b^2)(c-a)^2 - a(a^2+2t_a^2)c}\right]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, t_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\mathrm{cm}$, $t_a = 8\sqrt{21}\,\mathrm{cm}$ et $t_b = \frac{40}{3}\,\mathrm{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\mathrm{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\mathrm{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 205)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2 \qquad (*)$$

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 - 1\right]ab = t_c^2. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac+t_b^2)(c-a)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$[c^2 - b^2 - a^2 + 2t_c^2]b = \left(\frac{t_c^2 - 2a^2}{a}\right)b^2 + at_c^2. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{a}{c}(ac+t_b^2)(c-a)^2 = \left[\frac{[t_c^2 - 2a^2](ac+t_b^2)(c-a)^2 + a^3t_c^2c}{2a^2c^2 - [(c-a)t_b]^2 - 2a(a^2-t_c^2)c}\right]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, t_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ et $t_c = 5\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 206)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et t_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 33).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 207)

Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et t_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 34).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 208)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{$*$}$$

$$\frac{2bc\sin\alpha/2}{|b-c|} = t_a \implies (b-c)^2 = \left(\frac{2bc\sin\alpha/2}{t_a}\right)^2 \tag{$**$}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r}{p-a} \implies \frac{\sin\alpha/2}{\sqrt{1-\sin^2\alpha/2}} = \frac{2r}{b+c-a}. \tag{$***$}$$

De (***), nous obtenons $b + c = a + \dfrac{2r\sqrt{1-\sin^2\alpha/2}}{\sin\alpha/2}$. $\quad$ (****)

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = a^2.$$

Comme $1-\cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2$, et avec (**), l'équation ci-dessus devient

$$(bc)^2 + t_a^2(bc) - \left(\frac{at_a}{2\sin\alpha/2}\right)^2 = 0 \implies$$

$$\implies bc = \frac{t_a\sqrt{t_a^2\sin^2\alpha/2 + a^2} - t_a^2\sin\alpha/2}{2\sin\alpha/2}. \qquad (*****)$$

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc(1+\cos\alpha).$$

Comme $1+\cos\alpha = 2(1-\sin^2\alpha/2)$ et, avec (****) et (*****), nous obtenons

$$t_a(1-x^2)(\sqrt{t_a^2x^2+a^2} - t_a x)x = 2r[ax\sqrt{1-x^2} + r(1-x^2)], \qquad (\dagger)$$

où $x = \sin\alpha/2$.

Comme a, t_a et r sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir x.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $x = \frac{\sqrt{21}}{14}$ est une racine de (†), après quoi nous obtenons $b = 7\,\text{cm}$ et $c = 8\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a,b,c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 209)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2 \qquad (*)$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = r. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac+t_b^2)(c-a)^2}{ac} \tag{***}$$

$$[c^2 - b^2 + a^2 - 2ac - 4r^2]b =$$
$$= c^3 - ac^2 - (c+a)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a. \tag{****}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{(ac+t_b^2)(c-a)^2}{ac} = \left[\frac{1}{[(c-a)t_b]^2 + 4ar^2c}\left\{[a^3c + (ac+t_b^2)(c-a)^2]c + \right.\right.$$
$$\left.\left. - ac^4 - a^4c + [(ac+t_b^2)(c-a)^2 + ac^3]a - 4ar^2(a+c)c\right\}\right]^2. \tag{†}$$

Comme a, t_b et r sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ et $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 210)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{*}$$

$$\frac{2bc\sin\alpha/2}{|b-c|} = t_a \implies (b-c)^2 = \left(\frac{2bc\sin\alpha/2}{t_a}\right)^2 \tag{**}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r_a}{p} \implies \frac{\sin\alpha/2}{\sqrt{1-\sin^2\alpha/2}} = \frac{2r_a}{a+b+c}. \tag{***}$$

De (***), nous obtenons $b + c = \dfrac{2r_a\sqrt{1-\sin^2\alpha/2}}{\sin\alpha/2} - a.$ $\qquad$ (****)

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = a^2.$$

Comme $1-\cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2$, et avec (**), l'équation ci-dessus devient

$$(bc)^2 + t_a^2(bc) - \left(\frac{at_a}{2\sin\alpha/2}\right)^2 = 0 \implies$$

$$\implies bc = \frac{t_a\sqrt{t_a^2\sin^2\alpha/2 + a^2} - t_a^2\sin\alpha/2}{2\sin\alpha/2}. \qquad (*****)$$

Nous pouvons écrire (*) comme

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc(1+\cos\alpha).$$

Comme $1+\cos\alpha = 2(1-\sin^2\alpha/2)$ et, avec (****) et (*****), nous obtenons

$$t_a(1-x^2)(\sqrt{t_a^2x^2+a^2} - t_ax)x + 2r_a[ax\sqrt{1-x^2} - r_a(1-x^2)] = 0, \qquad (\dagger)$$

où $x = \sin\alpha/2$.

Comme a, t_a et r_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir x.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $x = \frac{\sqrt{21}}{14}$ est une racine de (†), après quoi nous obtenons $b = 7\,\text{cm}$ et $c = 8\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 211)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 - 1\right]bc = t_a^2 \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b} = r_b. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^3 + \left(\frac{t_a^2}{c} - 2c\right)b^2 + (c^2 - 2t_a^2 - a^2)b + t_a^2 c = 0 \qquad (***)$$

$$b^3 + (a+c)b^2 - [(c-a)^2 - 4r_b^2]b - (c-a)c^2 + \\ + (a^2 - 4r_b^2)c - a(a^2 + 4r_b^2) = 0. \qquad (****)$$

Comme a, t_a et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (***)–(****) avec Mathematica, obtenant ainsi les deux côtés b et c du triangle.

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $b = 7$ et $c = 8$ satisfont aux deux équations du système. Donc, $b = 7\,\text{cm}$ et $c = 8\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 212)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2 \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = r_a. \qquad (**)$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac + t_b^2)(c-a)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$[(c+a)^2 - b^2 - 4r_a^2]b = \\ = c^3 + ac^2 - (c-a)b^2 + (4r_a^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\frac{(ac + t_b^2)(c-a)^2}{ac} = \\ = \left[\frac{ac^4 - (c-a)[ac + t_b^2](c-a)^2 + a[ac^2 + (4r_a^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a]c}{(ac + t_b^2)(c-a)^2 - a[(c+a)^2 + 4r_a^2]c}\right]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, t_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre ($\dagger$) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ et $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 213)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right] ac = t_b^2 \tag{$*$}$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b} = r_b. \tag{$**$}$$

Avec (*) et (**), nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac + t_b^2)(c-a)^2}{ac} \tag{$***$}$$

$$\begin{aligned}&[b^2 - (c-a)^2 + 4r_b^2]b = \\ &\quad = c^3 - ac^2 - (c+a)b^2 + (4r_b^2 - a^2)c + (a^2 + 4r_b^2)a.\end{aligned} \tag{$****$}$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par (***) dans (****), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{(ac + t_b^2)(c-a)^2}{ac} = \\ &= \left[\frac{ac^4 - (c+a)[ac + t_b^2](c-a)^2 - a[ac^2 - (4r_b^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_b^2)a]c}{[(c-a)t_b]^2 + 4ar_b^2c}\right]^2.\end{aligned} \tag{†}$$

Comme a, t_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ et $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de (†). Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec (***), $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 214)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = t_b^2 \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-c} = r_c. \qquad (**)$$

Avec $(*)$ et $(**)$, nous obtenons

$$b^2 = \frac{(ac+t_b^2)(c-a)^2}{ac} \qquad (***)$$

$$[b^2-(c+a)^2+4r_c^2]b =$$
$$= c^3+ac^2-(c-a)b^2+(4r_c^2-a^2)c-(a^2+4r_c^2)a. \qquad (****)$$

En remplaçant b^2 par sa valeur donnée par $(***)$ dans $(****)$, nous obtenons

$$\frac{(ac+t_b^2)(c-a)^2}{ac} =$$
$$= \left[\frac{ac^4-(c-a)[ac+t_b^2](c-a)^2+a[ac^2+(4r_c^2-a^2)c-(a^2+4r_c^2)a]c}{(ac+t_b^2)(c-a)^2-a(c+a)^2c+4ar_c^2c}\right]^2. \qquad (\dagger)$$

Comme a, t_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre $(\dagger)$ avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation $(\dagger)$ n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $t_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ et $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Nous pouvons constater que $c = 8$ est une racine de $(\dagger)$. Donc, $c = 8\,\text{cm}$ et, avec $(***)$, $b = 7\,\text{cm}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle (a, b, c) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exercice 215)

Premier procédé - Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 40).

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, \mathbf{B}\mathbf{C}I$ (figure auxiliaire). Nous commençons avec le théorème suivant, dû à Euler:

Théorème 14: *La distance (d) entre les centres des cercles circonscrit et inscrit dans un triangle est donnée par la relation*

$$\overline{OI} = d = \sqrt{R(R-2r)},$$

où R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit, respectivement.

Démonstration:

Soit la figure 71. La puissance du point I par rapport au cercle circonscrit nous permet d'écrire:

$$\overline{I\mathbf{A}} \cdot \overline{ID} = \overline{IS} \cdot \overline{IT} = (R-d)(R+d). \qquad (*)$$

Nous savons aussi que les points I, $\mathbf{B}$, I_a et $\mathbf{C}$ appartiennent à un même cercle dont le diamètre est $\overline{II_a}$. Par conséquent, le centre de ce cercle est le point D et $\overline{ID} = \overline{\mathbf{B}D} = \overline{\mathbf{C}D}$.

Nous pouvons alors écrire l'équation $(*)$ comme

$$\overline{I\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{C}D} = R^2 - d^2. \qquad (**)$$

En outre, les deux triangles rectangles $\mathbf{A}IZ$ et $\mathbf{C}DU$ sont semblables parce que $\angle I\mathbf{A}Z = \angle \mathbf{C}UD$. Donc,

$$\frac{\overline{I\mathbf{A}}}{\overline{DU}} = \frac{\overline{IZ}}{\overline{\mathbf{C}D}} \implies \overline{I\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{C}D} = 2Rr. \qquad (***)$$

Avec $(***)$ et $(**)$, nous avons

$$2Rr = R^2 - d^2 \implies d^2 = R(R-2r). \qquad \blacksquare$$

Avec le résultat du théorème 14 et la figure 71, nous avons deux propriétés pour le point I:

i) sa distance d au point O vaut $d = \sqrt{R(R-2r)}$;

ii) sa distance à la droite qui contient les points $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ (droite s) vaut r.

D'où la construction qui suit (voir figure 71):

i) sur une droite s quelconque, placer les points $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire le centre O du cercle circonscrit (O possède deux propriétés: O appartient à la médiatrice du segment $\mathbf{BC}$ et $\overline{\mathbf{B}O} = R$), le cercle (ϕ_1) circonscrit et le point D;

iii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r;

iv) du point O, avec une ouverture de compas égale à d, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $I \in t \cap \phi_2$;

v) si u est la droite définie par les points D et I, alors $\mathbf{A} \in u \cap \phi_1$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

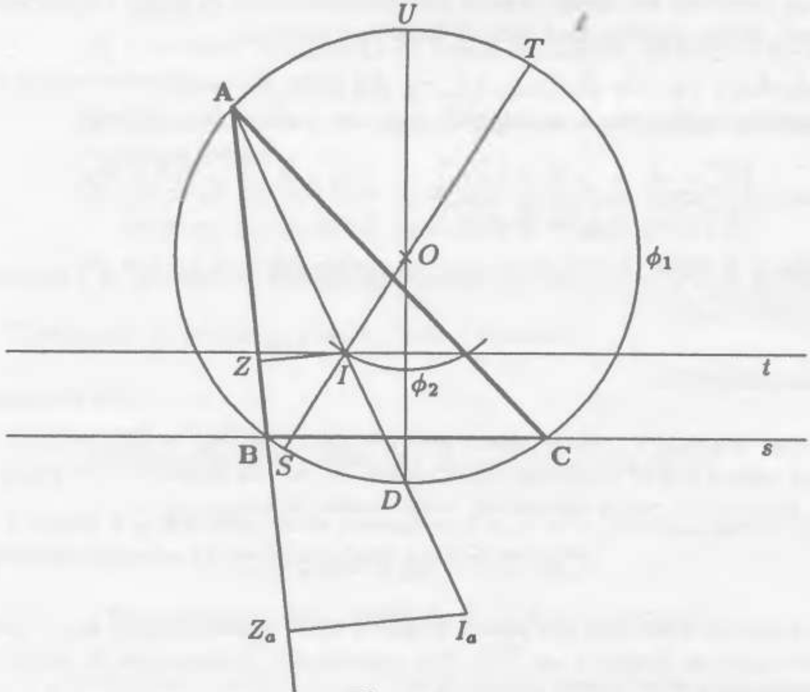


Figure 71

Pour obtenir d, nous faisons la construction auxiliaire montrée à la figure 69, avec $\overline{DA} = R$ et $\overline{DB} = R - 2r$; par conséquent,

$$\overline{DC} = \sqrt{R(R-2r)} = d.$$

Observation: comme $d^2 = R(R-2r) \geq 0$, nous avons $r \leq R/2$ et, avec le résultat du théorème 7 [item d), page 42], nous montrons que

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

avec égalité dans le cas du triangle équilatéral ($I \equiv O$ et $d = 0$).

Exercice 216)

Premier procédé - Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 42).

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle \mathbf{BC}I_a$ (figure auxiliaire). Nous commençons avec le théorème suivant:

Théorème 15: *Les distances (d_a, d_b, d_c) entre les centres des cercles circonscrit et exinscrits à un triangle sont données par les relations*

$$\overline{OI_a} = d_a = \sqrt{R(R+2r_a)}; \qquad \overline{OI_b} = d_b = \sqrt{R(R+2r_b)};$$
$$\overline{OI_c} = d_c = \sqrt{R(R+2r_c)},$$

où R et r_a, r_b et r_c sont les rayons des cercles circonscrit et exinscrits, respectivement.

Démonstration:

Soit la figure 71. Nous allons prouver que $d_a^2 = \overline{OI_a}^2 = R(R+2r_a)$, les deux autres cas se prouvant de la même façon. La puissance du point I_a par rapport au cercle circonscrit nous permet d'écrire:

$$\overline{I_a\mathbf{A}} \cdot \overline{I_aD} = (d_a+R)(d_a-R). \tag{$*$}$$

Nous savons aussi que les points I, $\mathbf{B}$, I_a et $\mathbf{C}$ appartiennent à un même cercle dont le diamètre est $\overline{II_a}$. Par conséquent, le centre de ce cercle est le point D et $\overline{I_aD} = \overline{\mathbf{B}D} = \overline{\mathbf{C}D}$.

Nous pouvons alors écrire l'équation ($*$) comme

$$\overline{I_a\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{C}D} = d_a^2 - R^2. \tag{$**$}$$

En outre, les deux triangles rectangles $\mathbf{A}I_aZ_a$ et $\mathbf{C}DU$ sont semblables parce que $\angle I_a\mathbf{A}Z_a = \angle \mathbf{C}UD$. Donc,

$$\frac{\overline{I_a\mathbf{A}}}{\overline{DU}} = \frac{\overline{I_aZ_a}}{\overline{\mathbf{C}D}} \implies \overline{I_a\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{C}D} = 2Rr_a. \tag{$***$}$$

Avec ($**$) et ($***$), nous avons

$$d_a^2 - R^2 = 2Rr_a \implies d_a^2 = R(R+2r_a). \qquad \blacksquare$$

Avec le résultat du théorème 15 et la figure 71, nous avons deux propriétés pour le point I_a:

i) sa distance d_a au point O vaut $d_a = \sqrt{R(R+2r_a)}$;

ii) sa distance à la droite qui contient les points **B** et **C** (droite s) vaut r_a.

D'où la construction qui suit (voir figure 71):

i) sur une droite s quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire le centre O du cercle circonscrit, le cercle (ϕ_1) circonscrit et le point D;

iii) tracer la droite v parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r_a;

iv) du point O, avec une ouverture de compas égale à d_a, construire un arc de cercle (ϕ_3) et $I_a \in v \cap \phi_3$;

v) si u est la droite définie par les points D et I_a, alors $\mathbf{A} \in u \cap \phi_1$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 217)

Premier procédé - Méthode du problème déjà résolu

Comme $a = 2R\sin\alpha$, nous connaissons α, a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 43).

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\,\mathbf{BC}I_b$ (figure auxiliaire). Nous avons deux propriétés pour le point I_b:

i) sa distance d_b au point O vaut $d_b = \sqrt{R(R+2r_b)}$;

ii) sa distance à la droite qui contient les points **B** et **C** (droite s) vaut r_b.

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite s quelconque, placer les points **B** et **C** tels que $\overline{\mathbf{BC}} = a$;

ii) construire le centre O du cercle circonscrit et le cercle (ϕ_1) circonscrit;

iii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r_b;

iv) du point O, avec une ouverture de compas égale à d_b, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $I_b \in t \cap \phi_2$;

v) $\angle \mathrm{CB}I_b = \beta/2$. Construire $\angle \beta$ et si les droites s et u forment $\angle \mathrm{CBA} = \beta$, alors $\mathrm{A} \in u \cap \phi_1$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 218)

Méthode du problème déjà résolu

Comme a, R et $r_a - r$ forment un datum, nous construisons R. Nous connaissons a, R et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 215).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 219)

Méthode du problème déjà résolu

Comme r, r_b et h_b forment un datum, nous construisons h_b. Nous connaissons a, h_b et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 161).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 220)

Méthode du problème déjà résolu

Comme r_a, r_b et h_c forment un datum, nous construisons h_c. Nous connaissons a, h_c et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 164).

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 221)

Méthode du problème déjà résolu

Comme a, R et $r_b + r_c$ forment un datum, nous construisons R. Nous connaissons a, R et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 217).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 222)

Méthode des figures semblables

Nous pouvons écrire

$$ah_a = bh_b = ch_c \quad (= 2S).$$

Ou, en divisant par $h_a h_b$,

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{m},$$

où $m = h_a h_b / h_c$. Par conséquent, nous pouvons facilement construire le segment m comme la quatrième proportionnelle des trois hauteurs.

Le Δ ABC est semblable au Δ AB′C′ (troisième cas de similitude des triangles) où $\overline{\mathrm{B'C'}} = h_b$, $\overline{\mathrm{AC'}} = h_a$ et $\overline{\mathrm{AB'}} = m$. Donc, nous pouvons dessiner la forme (Δ AB′C′) du triangle cherché (voir exercice 128).

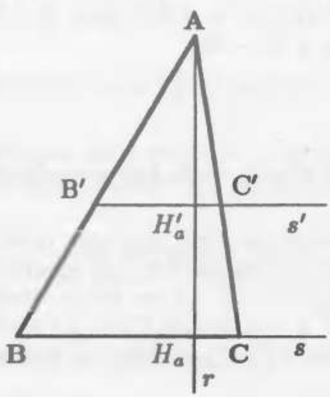


Figure 72

Nous construisons Δ AB′C′ et obtenons la droite s', la droite r ($\mathbf{A} \in r$ et $r \perp s'$) et le point H'_a. Sur la droite r, nous marquons le point H_a tel que $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et, à partir du point H_a, nous traçons la droite s ($s \parallel s'$) et obtenons facilement les points B et C (voir figure 72).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Observations:

i) la solution de ce problème dépend de la construction du $\triangle$ AB′C′. Alors, nous devons avoir:

$$h_a + h_b > m > h_a - h_b$$
$$h_a + h_b > \frac{h_a h_b}{h_c} > h_a - h_b$$
$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a} > \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}.$$

ii) une solution très connue pour ce problème (voir [24] et [25]) est la suivante:

1) construire $\triangle XYZ$ avec côtés $x = h_a$, $y = h_b$ et $z = h_c$.
2) obtenir les hauteurs a', b' et c'.
3) $\triangle$ **ABC** est semblable au triangle dont les côtés sont a', b' et c'.

Cette solution a l'inconvénient de ne pas toujours permettre la construction du $\triangle$ **ABC**, même si les donnés en permettent une.

Exemple: si $h_a = 156\,\text{mm}$, $h_b = 65\,\text{mm}$ et $h_c = 60\,\text{mm}$, nous ne pourrons pas construire $\triangle XYZ$ $(h_a > h_b + h_c)$ mais $\triangle$ **ABC** existe puisque $m = 169\,\text{mm}$ et $h_a + h_b > m > h_a - h_b$.

Exercice 223)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle \mathbf{A}M_aD$ (figure auxiliaire). Une analyse de la figure 73 nous montre que le point D (D_1, D_2) possède deux propriétés:

i) il appartient à l'arc capable (ϕ_1) de l'angle droit sur le segment $\mathbf{A}M_a$;

ii) sa distance au point M_a vaut $h_b/2$.

D'où la construction qui suit (voir figure 73):

i) construire $\triangle \mathbf{A}H_aM_a$;

ii) construire le cercle ϕ_1. Du point M_a, avec une ouverture de compas égale à $h_b/2$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et D_1 $(D_2) \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iii) si r est la droite définie par les points H_a et M_a et $s\,(t)$, celle définie par les points **A** et D_1 (D_2), alors $\mathbf{C}_1$ $(\mathbf{C}_2) \in r \cap s\,(t)$;

iv) du point M_a, avec une ouverture de compas égale à $\overline{M_a C_1}$ ($\overline{M_a C_2}$), construire un arc de cercle ($\phi_3\,(\phi_4)$) et $B_1\,(B_2) \in r \cap \phi_3\,(\phi_4)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\, AB_1C_1$ et $\triangle\, AB_2C_2$) solutions.

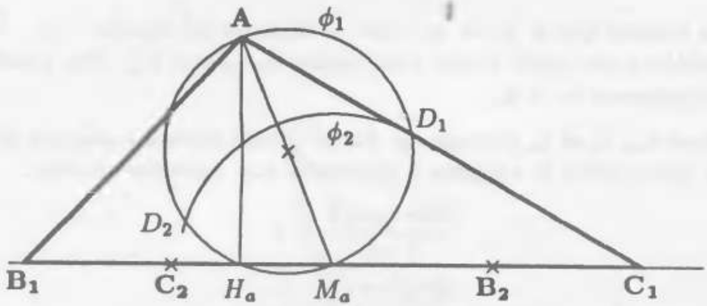


Figure 73

Exercice 224)

Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, M_c D_1 E$ (figure auxilaire). La figure 74 nous montre que le point D_1 (E) possède deux propriétés:

i) sa distance au point M_c vaut $h_a/2$ ($h_b/2$);

ii) un observateur placé en D_1 (E) voit le segment CM_c selon un angle droit (D_1 (E) appartient à l'arc capable — ϕ_1 — de l'angle droit sur le segment CM_c).

D'où la construction qui suit:

i) sur une droite q quelconque, placer les points C et M_c tels que $\overline{CM_c} = m_c$;

ii) construire ϕ_1;

iii) du point M_c, avec une ouverture de compas égale à $h_a/2$ ($h_b/2$), construire un arc de cercle ($\phi_2\,(\phi_3)$) et $D_1\,(D_2) \in \phi_1 \cap \phi_2$ et $E \in \phi_1 \cap \phi_3$;

iv) tracer la droite s parallèle à la droite r (définie par les points C et E) et distante de celle-ci d'une longueur h_b;

v) si $t\,(u)$ est la droite définie par $\mathbf{C}$ et $D_1\,(D_2)$, alors $\mathbf{B}_1\,(\mathbf{B}_2) \in s \cap t\,(u)$.

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}$ et $\triangle\,\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}$) solutions.

Exercice 225)

Méthode algébrique

Nous notons que si $h_a = s_a \implies$ le triangle est isocèle $\implies h_b = h_c$ et le problème est résolu (nous connaissons h_a, h_b et h_c). Par conséquent, nous supposerons $h_b \neq h_c$.

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous pouvons calculer t_a. Nous écrivons maintenant le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = s_a \tag{$*$}$$

$$\frac{2bc\sin\alpha/2}{|b-c|} = t_a. \tag{$**$}$$

Sachant que

$$b = h_c/\sin\alpha$$
$$c = h_b/\sin\alpha,$$

et avec ($*$) et ($**$), nous obtenons

$$\sin\alpha/2 = \frac{h_b h_c}{(h_b+h_c)s_a} \tag{$***$}$$

$$\cos\alpha/2 = \frac{h_b h_c}{|h_b-h_c|t_a}. \tag{$****$}$$

Comme $\sin^2\alpha/2 + \cos^2\alpha/2 = 1$, nous obtenons avec ($***$) et ($****$)

$$\left[s_a^2 + t_a^2 - \left(\frac{s_a t_a}{h_b}\right)^2\right] h_c^4 + 2h_b(s_a^2 - t_a^2)h_c^3 + \left[h_b^2(s_a^2+t_a^2) + \right.$$
$$\left. + 2(s_a t_a)^2\right] h_c^2 - (h_b s_a t_a)^2 = 0. \tag{$\dagger$}$$

Comme h_b, s_a et t_a sont connus, nous pouvons résoudre ($\dagger$) avec Mathematica pour obtenir h_c.

Si l'équation ($\dagger$) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}\,\text{cm}$ et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

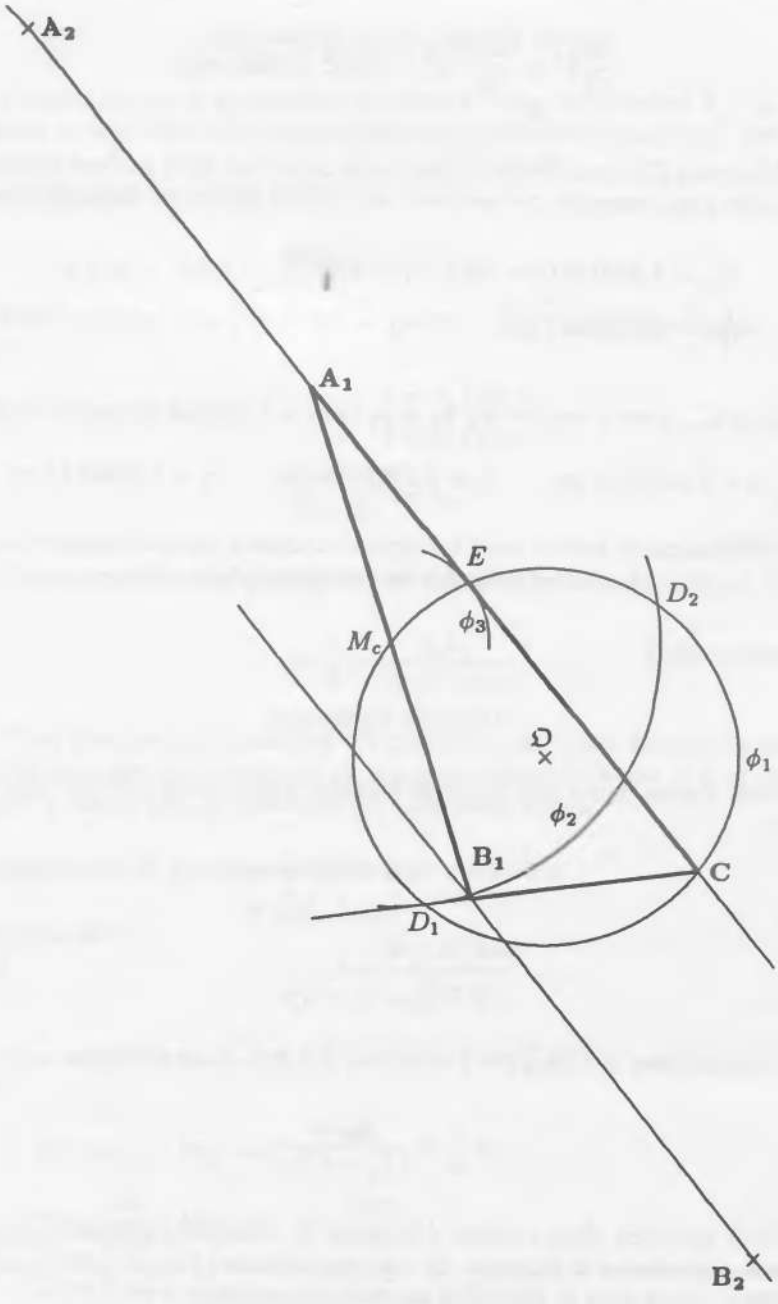


Figure 74

Avec h_a et s_a nous obtenons $t_a = 8\sqrt{21}$ cm et l'équation (†) devient

$$\frac{98}{75}h_c^4 + \frac{65\sqrt{3}}{9}h_c^3 - 164h_c^2 + 1600 = 0. \tag{‡}$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons deux racines positives, lesquelles sont montrées ci-bas (avec six chiffres décimaux exacts):

$$h_{c_1} = 4{,}330127\,0\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm},\ b_1 = 7\,\text{cm},\ c_1 = 8\,\text{cm}$$
$$h_{c_2} = 5{,}793555\,1\,\text{cm}.$$

Avec h_{c_2}, nous obtenons a_2, b_2 et c_2 (avec six chiffres décimaux exacts):

$$a_2 = 5{,}908794\,3\,\text{cm} \qquad b_2 = 8{,}272311\,9\,\text{cm} \qquad c_2 = 7{,}066011\,6\,\text{cm}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les triangles (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 226)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a = h_b/\sin\gamma \tag{*}$$
$$b = h_a/\sin\gamma \tag{**}$$
$$\frac{2ab\cos\gamma/2}{a+b} = s_c. \tag{***}$$

Comme $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ et avec (*)–(***), nous obtenons

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a h_b}{(h_a + h_b)s_c}.$$

Nous pouvons alors calculer (et même le construire géométriquement, si nous connaissons la longueur du segment unitaire) l'angle $\gamma/2$, et ensuite l'angle γ, après quoi le problème est facilement résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 227)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, h_b et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 225).

Exercice 228)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a = h_b / \sin\gamma \tag{$*$}$$
$$b = h_a / \sin\gamma \tag{$**$}$$
$$\frac{2ab\sin\gamma/2}{|b-a|} = t_c. \tag{$***$}$$

Comme $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ et avec $(*)$–$(***)$, nous obtenons

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a h_b}{|h_a - h_b| t_c}.$$

Nous pouvons alors calculer (et même le construire géométriquement, si nous connaissons la longueur du segment unitaire) l'angle $\gamma/2$, et ensuite l'angle γ, après quoi le problème est facilement résolu.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 229)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2S = ah_a = bh_b \implies b = \frac{ah_a}{h_b} \tag{$*$}$$
$$2S = \frac{abc}{2R} = bh_b \implies c = \frac{2Rh_b}{a} \tag{$**$}$$
$$a = 2R\sin\alpha \implies \cos\alpha = \pm\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2} \tag{$***$}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{$****$}$$

Avec le système (*)–(****), nous obtenons

$$\left[1-\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2\right]^2 t^4 + 4h_a^2 t^3 - 8R^2(h_a^2+h_b^2)t^2 + (2Rh_b)^4 = 0, \qquad (\dagger)$$

où $a = \sqrt{t}$.

Comme h_a, h_b et R sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir t.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}\,\text{cm}$ et $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$\frac{576}{625}t^4 + 192t^3 - 9472t^2 + 2560000 = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$t_1 = 25 \implies a_1 = 5\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$t_2 = 30{,}597982843261 \implies a_2 = 5{,}5315443\,\text{cm} \implies$$

$$b_2 = \frac{7a_2}{5} = 7{,}7441621\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{40}{a_2} = 7{,}2312536\,\text{cm}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les triangles (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

La règle de Descartes nous dit que l'équation (†) aura 2 ou 0 racines positives. Donc nous avons la discussion suivante:

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 solutions.

Exercice 230)

Méthode du problème déjà résolu

Nous savons que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Nous pouvons alors calculer (et même construire) la hauteur h_c et nous nous retrouvons avec le problème 222.

Pour construire h_c, nous commençons par construire le segment m tel que

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \implies m = \frac{h_a h_b}{h_a + h_b},$$

i.e., m est la quatrième proportionnelle entre les segments $h_a + h_b$, h_a et h_b.

Ensuite nous faisons

$$\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{m} \implies h_c = \frac{mr}{m - r},$$

i.e., h_c est la quatrième proportionnelle entre les segments $m - r$, m et r.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 231)

Méthode du problème déjà résolu

Nous savons que h_a, r, r_a forment un datum ($r = h_a r_a/[h_a + 2r_a]$). Nous obtenons r et nous nous retrouvons avec le problème précédent.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 232)

Méthode du problème déjà résolu

Nous savons que h_a, r_b, r_c forment un datum ($r_b = h_a r_c/[2r_c - h_a]$). Nous obtenons r_b. Nous savons que h_b, r, r_b forment un datum ($r = h_b r_b/[h_b + 2r_b]$). Nous obtenons r et nous nous retrouvons avec le problème 230.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 233)

Méthode de la figure auxiliaire

La figure 75 nous montre que le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, \mathrm{A} H_a M_{a_i}$ $(i = 1, 2)$ (figure auxiliaire) et le point G_i (barycentre). D'où la construction qui suit (voir figure 75):

i) construire $\triangle \mathbf{A}H_aM_{a_i}$ où $\angle \mathbf{A}H_aM_{a_i} = 90°$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathbf{A}M_{a_i}} = m_a$. Placer le point G_i sur le côté $\mathbf{A}M_{a_i}$ tel que $\overline{\mathbf{A}G_i} = 2m_a/3$;

ii) du point G_i, avec une ouverture de compas égale à $\frac{2m_b}{3}$, construire un arc de cercle (ϕ_i). Si r est la droite qui contient les points H_a et M_{a_i}, alors $\mathbf{B_i} \in r \cap \phi_i$;

iii) placer le point $\mathbf{C_i} \in r$ tel que $\overline{M_{a_i}\mathbf{C_i}} = \overline{M_{a_i}\mathbf{B_i}}$.

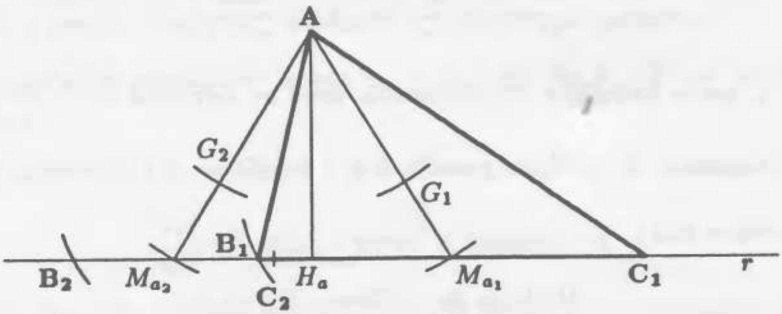


Figure 75

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathbf{AB_1C_1}$ et $\triangle \mathbf{AB_2C_2}$) solutions.

Exercice 234)

Méthode de la figure auxiliaire

La figure 76 nous montre que le problème est résolu si nous construisons le point G et $\triangle \mathbf{B}M_bD$ (figure auxiliaire) où le point D possède deux propriétés:

i) sa distance au point M_b vaut $h_a/2$;

ii) un observateur placé en D voit le segment $\mathbf{B}M_b$ selon un angle droit (D appartient à l'arc capable—ϕ_1—de l'angle droit sur le segment $\mathbf{B}M_b$).

D'où la construction qui suit (voir figure 76):

i) sur une droite q quelconque, placer les points $\mathbf{B}$ et M_b tels que $\overline{\mathbf{B}M_b} = m_b$. Placer $G \in q$ tel que $\overline{\mathbf{B}G} = 2m_b/3$;

ii) construire ϕ_1. Du point M_b, avec une ouverture de compas égale à $h_a/2$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $D \in \phi_1 \cap \phi_2$;

iii) du point G, avec une ouverture de compas égale à $\frac{2m_a}{3}$, construire un arc de cercle (ϕ_3). Si r est la droite définie par les points $\mathbf{B}$ et D, alors $\mathbf{C_i} \in r \cap \phi_3$ ($i = 1, 2$);

iv) soit s_i la droite définie par les points $\mathbf{C_i}$ et M_b. Placer le point $\mathbf{A_i} \in s_i$ tel que $\overline{M_b\mathbf{A_i}} = \overline{M_b\mathbf{C_i}}$.

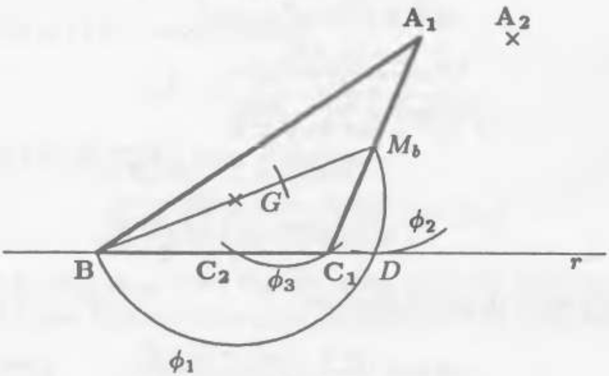


Figure 76

Discussion: le problème possède 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{A_1BC_1}$ et $\triangle\,\mathbf{A_2BC_2}$) solutions.

Exercice 235)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 67 de l'exercice 148 nous montre que le problème est résolu si nous construisons $\triangle\,\mathbf{A}H_aS_a$ et le point O. Nous savons que le point O possède deux propriétés:

i) il appartient à la médiatrice (droite s) de $\mathbf{BC}$;

ii) il appartient à la droite qui contient les points $\mathbf{A}$ et E (droite t).

D'où la construction qui suit (voir figure 67):

i) construire $\triangle\,\mathbf{A}H_aS_a$ où $\angle \mathbf{A}H_aS_a = 90°$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathbf{A}S_a} = s_a$. Soit r la droite qui contient les points H_a et S_a. Placer $M_a \in r$ tel que $\overline{\mathbf{A}M_a} = m_a$. Mener à partir de M_a une perpendiculaire (droite s) à la droite r ($s \perp r$);

ii) soit $\varphi = \angle H_a\mathbf{A}S_a$. Construire la droite t telle que si $E \in t$, alors $\angle E\mathbf{A}S_a = \varphi$. Obtenir le point O ($O \in s \cap t$). Du point O, avec une ouverture de compas égale à $\overline{O\mathbf{A}}$, construire le cercle circonscrit (ϕ) et $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in r \cap \phi$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 236)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c \sin\beta = h_a \tag{I}$$

$$2(b^2+c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ac\cos\beta/2}{a+c} = s_b \tag{III}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{V}$$

$$\cos\beta/2 = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{[(a+c)s_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{[(a+c)s_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (II), (IV) et (VII), nous obtenons

$$a^2 + 4c^2 - \frac{2\{[(a+c)s_b]^2 - 2(ac)^2\}}{ac} = 4m_a^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VIII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 237)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b \sin\gamma = h_a \tag{I}$$

$$2(a^2+c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{III}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma. \tag{V}$$

Avec (II), nous obtenons

$$a^2 = \frac{b^2 - 2c^2 + 4m_b^2}{2}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\left[1 - \frac{b^2 - 2c^2 + 4m_b^2}{2(b+c)^2}\right] bc = s_a^2. \tag{VII}$$

Avec (IV) et (VI), nous obtenons

$$\cos^2\gamma = \frac{(3b^2 - 4c^2 + 4m_b^2)^2}{8(b^2 - 2c^2 + 4m_b^2)b^2}. \tag{VIII}$$

Avec (I), (V) et (VIII), nous obtenons

$$\left[1 - \frac{(3b^2 - 4c^2 + 4m_b^2)^2}{8(b^2 - 2c^2 + 4m_b^2)b^2}\right] b^2 = h_a^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_b et s_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (VII) et (IX) avec Mathematica pour obtenir b et c et ensuite a.

Exercice 238)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c \sin\beta = h_a \tag{I}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{III}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta. \tag{V}$$

Avec (I) et (V), nous obtenons

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{h_a^2}{c^2} = \frac{c^2 - h_a^2}{c^2}. \tag{VI}$$

Avec (II), (IV) et (VI), nous obtenons

$$(a^2 + c^2 - 4m_b^2)^2 - 4(c^2 - h_a^2)a^2 = 0. \tag{VII}$$

Avec (II) et (III), nous obtenons

$$\left[1 - \frac{2(a^2 + c^2) - 4m_b^2}{(a+c)^2}\right] ac - s_b^2 = 0. \tag{VIII}$$

Comme h_a, m_b et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VII)–(VIII) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 239)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b \sin \gamma = h_a \tag{I}$$
$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$
$$\frac{2ab \cos \gamma/2}{a + b} = s_c \tag{III}$$
$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2 \tag{IV}$$
$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma \tag{V}$$
$$\cos \gamma/2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos \gamma = \frac{[(a + b)s_c]^2 - 2(ab)^2}{2(ab)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{[(a + b)s_c]^2 - 2(ab)^2}{2(ab)^2}\right)^2\right]b^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (II), (IV) et (VII), nous obtenons

$$4a^2 + b^2 - \frac{2\{[(a + b)s_c]^2 - 2(ab)^2\}}{ab} = 4m_b^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (VIII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a et b et ensuite c.

Exercice 240)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, m_a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 235).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 241)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c\sin\beta = h_a \tag{I}$$
$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \tag{II}$$
$$\frac{2ac\sin\beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{III}$$
$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2 \tag{IV}$$
$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta \tag{V}$$
$$\sin\beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\Big[1-\Big(\frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}\Big)^2\Big]c^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (II), (IV) et (VII), nous obtenons

$$a^2+4c^2-\frac{2\{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2\}}{ac} = 4m_a^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VIII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 242)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, m_b et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 237).

Exercice 243)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c\sin\beta = h_a \tag{I}$$

$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ac\sin\beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{III}$$

$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta \tag{V}$$

$$\sin\beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\left[1-\left(\frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (II), (IV) et (VII), nous obtenons

$$a^2+c^2+\frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{ac} = 4m_b^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_b et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VIII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 244)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b\sin\gamma = h_a \tag{I}$$

$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ab\sin\gamma/2}{|a-b|} = t_c \tag{III}$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma \tag{V}$$

$$\sin\gamma/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos\gamma = \frac{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2}{2(ab)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2}{2(ab)^2}\right)^2\right]b^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (II), (IV) et (VII), nous obtenons

$$4a^2 + b^2 - \frac{2\{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2\}}{ab} = 4m_b^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (VIII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a et b et ensuite c.

Exercice 245)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 67 de l'exercice 148 nous montre que le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathbf{A}H_aM_a$ et le point O (centre du cercle circonscrit). Nous savons que le point O possède deux propriétés:

i) sa distance au point **A** vaut R;

ii) il appartient à la médiatrice (droite s) de **BC**.

D'où la construction qui suit (voir figure 67):

i) construire $\triangle\, \mathbf{A}H_aM_a$ où $\angle \mathbf{A}H_aM_a = 90°$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathbf{A}M_a} = m_a$. Soit r la droite qui contient les points H_a et M_a. Mener à partir de M_a une perpendiculaire (droite s) à la droite r ($s \perp r$);

ii) Du point **A**, avec une ouverture de compas égale à R, construire un arc de cercle (ϕ_1) et $O \in s \cap \phi_1$. Du point O, avec une ouverture de compas égale à $\overline{O\mathbf{A}}$, construire le cercle circonscrit (ϕ_2) et $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in r \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 246)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left(S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}\right) \quad bc = 2Rh_a \tag{I}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$

$$2R \sin\alpha = a \tag{III}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha. \tag{V}$$

Avec (I), nous obtenons

$$b = \frac{2Rh_a}{c}. \tag{VI}$$

Avec (II) et (VI), nous obtenons

$$(ac)^2 = 2(m_b c)^2 + 2(Rh_a)^2 - c^4. \tag{VII}$$

Avec (I), (IV) et (VI), nous obtenons

$$\cos\alpha = \frac{c^4 - (ac)^2 + (2Rh_a)^2}{4Rh_a c^2}. \tag{VIII}$$

Avec (III), (V) et (VIII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{c^4 - (ac)^2 + (2Rh_a)^2}{4Rh_a c^2}\right)^2\right](2Rc)^2 - (ac)^2 = 0. \tag{IX}$$

Avec (VII) et (IX), nous obtenons

$$t^4 - (h_a^2 + 2m_b^2)t^3 + (2h_a^2 m_b^2 + m_b^4 - 2R^2 h_a^2)t^2 + \\ + [2(h_a^2 - m_b^2)(Rh_a)^2]t + (Rh_a)^4 = 0, \tag{†}$$

où $c = \sqrt{t}$.

Comme h_a, m_b et R sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir t.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ et $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

L'équation (†) devient

$$t^4 - \frac{225}{2}t^3 + \frac{41089}{16}t^2 + 24696t + 614656 = 0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$t_1 = 64 \implies c_1 = 8\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm} \quad \text{et} \quad b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$t_2 = 60{,}080869581759 \implies c_2 = 7{,}7511850\,\text{cm} \implies$$

$$b_2 = \frac{56}{c_2} = 7{,}2247017\,\text{cm} \quad \text{et} \quad a_2 = 5{,}5242455\,\text{cm}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les triangles (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 247)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous pouvons obtenir r_a. La figure 57 de l'exercice 122 nous montre que le problème est résolu si nous construisons $\triangle\,\mathbf{A}H_aM_a$ et les points D et O.

Nous savons que le point D possède deux propriétés:

i) sa distance au point M_a vaut $(r_a - r)/2$;

ii) il appartient à la médiatrice (droite s) de $\mathbf{BC}$.

Quant au point O, il possède deux propriétés:

i) il appartient à la médiatrice (droite s) de $\mathbf{BC}$;

ii) il appartient à la médiatrice (droite t) de $\mathbf{A}D$.

D'où la construction qui suit (voir figure 57):

i) obtenir r_a ($r_a = \frac{rh_a}{h_a - 2r}$) et construire la longueur ℓ telle que $\ell = (r_a - r)/2$;

ii) construire $\triangle\,\mathbf{A}H_aM_a$ où $\angle\mathbf{A}H_aM_a = 90°$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathbf{A}M_a} = m_a$. Soit q la droite qui contient les points H_a et M_a. Mener à partir de M_a une perpendiculaire (droite s) à la droite q ($s \perp q$);

iii) Du point M_a, avec une ouverture de compas égale à ℓ, construire un arc de cercle (ϕ_1) et $D \in s \cap \phi_1$. Construire la médiatrice (droite t) de $\mathbf{A}D$ et $O \in s \cap t$. Du point O, avec une ouverture de compas égale à $\overline{O\mathbf{A}}$, construire le cercle circonscrit (ϕ_2) et $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in q \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 248)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \qquad \text{(I)}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$c\sin\beta = h_a \qquad \text{(III)}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta. \qquad \text{(IV)}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$\cos^2\beta = \Big(\frac{c^2 + a^2 - 4m_b^2}{2ac}\Big)^2. \qquad \text{(V)}$$

Avec (III), (IV) et (V), nous obtenons

$$\Big[1 - \Big(\frac{c^2 + a^2 - 4m_b^2}{2ac}\Big)^2\Big]c^2 = h_a^2. \qquad \text{(VI)}$$

Maintenant nous écrivons le système d'équations non linéaires suivant:

$$\begin{array}{l} 2Rh_a = bc \\ 2R\sin\alpha = a \end{array} \implies bc = \frac{ah_a}{\sin\alpha} \qquad \text{(VII)}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2r}{b+c-a} \implies b + c = a + 2r\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \qquad \text{(VIII)}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \qquad \text{(IXa)}$$

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2 \qquad \text{(IXb)}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \text{(X)}$$

Avec (VII)–(VIII) et (IXb)–(X), nous obtenons

$$\cos\alpha = \frac{[(h_a - 2r)a]^2 - 4r^4}{[(h_a - 2r)a]^2 + 4r^4}. \qquad \text{(XI)}$$

Avec (II), (VII) et (IXa), nous obtenons

$$a^2 + 3c^2 - 4m_b^2 = 2h_a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a. \qquad \text{(XII)}$$

Comme $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ et avec (XI) et (XII), nous obtenons

$$9c^4 + 6(a^2 - 4m_b^2)c^2 + (a^2 - 4m_b^2)^2 = \frac{h_a^2\{[(h_a - 2r)a]^2 - 4r^4\}^2}{[2(h_a - 2r)r^2]^2}. \qquad \text{(XIII)}$$

Comme h_a, m_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (VI) et (XIII) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 249)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, m_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 247).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 250)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous pouvons obtenir r_c. La figure 57 de l'exercice 122 nous montre que le problème est résolu si nous construisons $\triangle\,\mathbf{A}H_aM_a$ et les points U et O.

Nous savons que le point U possède deux propriétés:

i) sa distance au point M_a vaut $(r_b + r_c)/2$;
ii) il appartient à la médiatrice (droite s) de $\mathbf{BC}$.

Quant au point O, il possède deux propriétés:

i) il appartient à la médiatrice (droite s) de $\mathbf{BC}$;
ii) il appartient à la médiatrice (droite t) de $\mathbf{A}U$.

D'où la construction qui suit (voir figure 57):

i) obtenir r_c ($r_c = \frac{h_a r_b}{2r_b - h_a}$) et construire la longueur ℓ telle que $\ell = (r_b + r_c)/2$;
ii) construire $\triangle\,\mathbf{A}H_aM_a$ où $\angle \mathbf{A}H_aM_a = 90°$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathbf{A}M_a} = m_a$. Soit q la droite qui contient les points H_a et M_a. Mener à partir de M_a une perpendiculaire (droite s) à la droite q ($s \perp q$);
iii) Du point M_a, avec une ouverture de compas égale à ℓ, construire un arc de cercle (ϕ_1) et $U \in s \cap \phi_1$. Construire la médiatrice (droite t) de $\mathbf{A}U$ et $O \in s \cap t$. Du point O, avec une ouverture de compas égale à $\overline{O\mathbf{A}}$, construire le cercle circonscrit (ϕ_2) et $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in q \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 251)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, m_b et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 248).

Exercice 252)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c \sin \beta = h_a \tag{I}$$
$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$
$$a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 \tag{III}$$
$$\tan \beta/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = \frac{2r_b}{a + b + c} \tag{IV}$$
$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \tag{V}$$

Avec (II) et (III), nous obtenons

$$\cos \beta = \frac{4m_b^2 - a^2 - c^2}{2ac} \implies \cos^2 \beta = \Big(\frac{a^2 + c^2 - 4m_b^2}{2ac}\Big)^2. \tag{VI}$$

Avec (I), (V) et (VI), nous obtenons

$$(a^2 + c^2 - 4m_b^2)^2 = 4(c^2 - h_a^2)a^2. \tag{VII}$$

Avec (IV) et (VI), nous obtenons

$$\frac{(a + c)^2 - 4m_b^2}{4m_b^2 - (a - c)^2} = \frac{4r_b^2}{(a + b + c)^2}. \tag{VIII}$$

Avec (II), nous obtenons

$$b = \sqrt{2(a^2 + c^2) - 4m_b^2}. \tag{IX}$$

Comme h_a, m_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 253)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons h_a, m_b et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 252).

Exercice 254)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c\sin\beta = h_a \implies (1-\cos^2\beta)c^2 = h_a^2 \tag{I}$$

$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2 \implies \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \tag{II}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{III}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2. \tag{IV}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$\left[1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{V}$$

Comme h_a, s_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (III)–(V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 255)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left[1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{I}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = s_b^2 \tag{II}$$

$$\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]ab = s_c^2. \tag{III}$$

Comme h_a, s_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 256)

Datum

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, le problème est impossible ou indéterminé.

Exercice 257)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c \sin \beta = h_a \tag{I}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ac \sin \beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{III}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \tag{V}$$

$$\sin \beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos \beta}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (II), nous obtenons

$$a = \sqrt{\frac{(bc - s_a^2)(b+c)^2}{bc}}. \tag{VII}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos \beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{VIII}$$

Avec (I), (V) et (VIII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right] c^2 = h_a^2. \tag{IX}$$

Avec (IV) et (VIII), nous obtenons

$$a^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{ac} - b^2 = 0. \tag{X}$$

Comme h_a, s_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VII) et (IX)–(X) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 258)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 254).

Exercice 259)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, s_b et t_b forment un datum, nous connaissons h_a, h_b et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 225).

Exercice 260)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b \sin\gamma = h_a \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ab\sin\gamma/2}{|a-b|} = t_c \tag{III}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma \tag{V}$$

$$\sin\gamma/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$\cos\gamma = \frac{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2}{2(ab)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2}{2(ab)^2}\right)^2\right] b^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (IV) et (VII), nous obtenons

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2}{ab}}. \tag{IX}$$

Comme h_a, s_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (II) et (VIII)–(IX) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 261)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 67 de l'exercice 148 nous montre que le problème est résolu si nous construisons $\triangle\, \mathbf{A}H_aS_a$ et le point O. Nous savons que le point O possède deux propriétés:

i) sa distance au point **A** vaut R;

ii) il appartient à la droite qui contient les points **A** et E (droite t).

D'où la construction qui suit (voir figure 67):

i) construire $\triangle\, \mathbf{A}H_aS_a$ où $\angle \mathbf{A}H_aS_a = 90°$, $\overline{\mathbf{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathbf{A}S_a} = s_a$. Soit r la droite qui contient les points H_a et S_a;

ii) soit $\varphi = \angle H_a\mathbf{A}S_a$. Construire la droite t telle que si $E \in t$, alors $\angle E\mathbf{A}S_a = \varphi$. Du point **A**, avec une ouverture de compas égale à R, construire un arc de cercle (ϕ_1). Obtenir le point O $(O \in t \cap \phi_1)$. Du point O, avec une ouverture de compas égale à R, construire le cercle circonscrit (ϕ_2) et $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in r \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 262)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left(S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}\right) \quad bc = 2Rh_a \tag{I}$$

$$c \sin\beta = h_a \tag{II}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{III}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{IV}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta. \tag{V}$$

Avec (I), nous obtenons

$$b = \frac{2Rh_a}{c}. \tag{VI}$$

Avec (III) et (VI), nous obtenons

$$c(ac - s_b^2)(a+c)^2 - (2Rh_a)^2 a = 0. \tag{VII}$$

Avec (IV) et (VI), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{c^4 + (ac)^2 - (2Rh_a)^2}{2ac^3}. \tag{VIII}$$

Avec (II), (V) et (VIII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{c^4 + (ac)^2 - (2Rh_a)^2}{2ac^3}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, s_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (VII) et (IX) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 263)

Méthode de l'intersection de deux lieux géométriques

La figure 77 nous montre que le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, \mathrm{A}H_aS_a$, le point I (centre du cercle inscrit) et les points de tangence T_i, $(i = 2,3)$. D'où la construction qui suit (voir figure 77):

i) construire $\triangle\, \mathrm{A}H_aS_a$ où $\angle \mathrm{A}H_aS_a = 90°$, $\overline{\mathrm{A}H_a} = h_a$ et $\overline{\mathrm{A}S_a} = s_a$. Soit s la droite qui contient les points H_a et S_a et u, celle définie par les points A et S_a;

ii) tracer la droite t parallèle à la droite s et distante de celle-ci d'une longueur r, obtenant le point I $(I \in t \cap u)$. Dessiner le cercle inscrit (ϕ_1) et l'arc capable de l'angle droit (ϕ_2) sur le segment $\mathrm{A}I$, obtenant ainsi les points T_i $(T_i \in \phi_1 \cap \phi_2)$;

iii) si v_i, $(i = 2,3)$ sont les droites définies par les points A et T_i, alors $\mathrm{B} \in s \cap v_3$ et $\mathrm{C} \in s \cap v_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

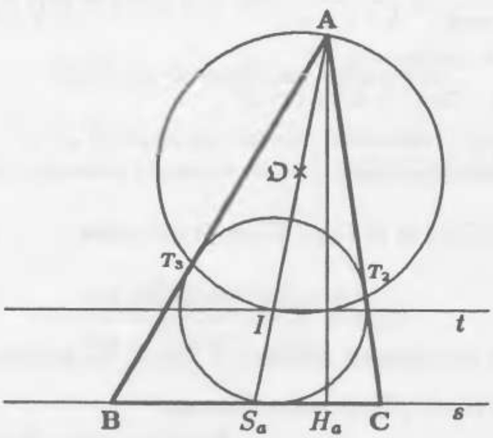


Figure 77

Exercice 264)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$c\sin\beta = h_a \tag{III}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta. \tag{IV}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{[(a+c)s_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2}. \tag{V}$$

Avec (III), (IV) et (V), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{[(a+c)s_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{VI}$$

Maintenant nous écrivons le système d'équations non linéaires suivant:

$$\begin{matrix} 2Rh_a = bc \\ 2R\sin\alpha = a \end{matrix} \implies bc = \frac{ah_a}{\sin\alpha} \tag{VII}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2r}{b+c-a} \implies b+c = a + 2r\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \tag{VIII}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{IXa}$$

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2 \tag{IXb}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{X}$$

Avec (VII)–(VIII) et (IXb)–(X), nous obtenons

$$\cos\alpha = \frac{\left[(h_a - 2r)a\right]^2 - 4r^4}{\left[(h_a - 2r)a\right]^2 + 4r^4}. \tag{XI}$$

Avec (II), (VII) et (IXa), nous obtenons

$$(ac - s_b^2)(a+c)^2 + ac^3 - a^3c = 2h_a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a^2c. \tag{XII}$$

Comme $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ et avec (XI) et (XII), nous obtenons

$$[(ac - s_b^2)(a+c)^2 + ac^3 - a^3c]^2 = \left(\frac{h_a}{2r^2}\right)^2 \left(\frac{[(h_a - 2r)a]^2 - 4r^4}{h_a - 2r}\right)^2 (ac)^2. \tag{XIII}$$

Comme h_a, s_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (VI) et (XIII) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 265)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 263).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 266)

Méthode du problème déjà résolu

Avec les données du problème, nous pouvons obtenir r_c et tracer la bissectrice extérieure menée du sommet **A** (droite u). Donc nous pouvons placer I_b et I_c sur u (noter que I_b et I_c appartiennent aussi aux droites distantes de celle qui contient les points H_a et S_a de r_b et r_c, respectivement) et le problème est résolu (voir exercice 69).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 267)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_b et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 264).

Exercice 268)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{I}$$

$$c\sin\beta = h_a \tag{II}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{III}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \implies b^2 = \frac{(ac - s_b^2)(a+c)^2}{ac} \tag{IV}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r_b}{a+b+c}. \tag{V}$$

Avec (I), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}. \tag{VI}$$

Avec (II), (III) et (VI), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{VII}$$

Avec (V) et (VI), nous obtenons

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2} = \left(\frac{2r_b}{a+b+c}\right)^2. \tag{VIII}$$

Comme h_a, s_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (IV) et (VII)–(VIII) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 269)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons h_a, s_b et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 268).

Exercice 270)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et t_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 257).

Exercice 271)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c \sin \beta = h_a \tag{I}$$

$$\frac{2ac \sin \beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{II}$$

$$\sin \beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{III}$$

$$b \sin \gamma = h_a \tag{IV}$$

$$\frac{2ab \sin \gamma/2}{|a-b|} = t_c \tag{V}$$

$$\sin \gamma/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}. \tag{VI}$$

Avec (II) et (III), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{VII}$$

Avec (V) et (VI), nous obtenons

$$\cos\gamma = \frac{2(ab)^2 - [(a-b)t_c]^2}{2(ab)^2}. \tag{VIII}$$

Avec (I) et (IV), nous obtenons

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c} \quad \text{et} \quad \sin\gamma = \frac{h_a}{b}. \tag{IX}$$

Comme $\alpha = 180° - (\beta+\gamma) \implies \cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$, nous obtenons, avec (IX),

$$\cos\alpha = \frac{h_a^2}{bc} - \cos\beta\cos\gamma. \tag{X}$$

Nous écrivons aussi

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{XI}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{XII}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2. \tag{XIII}$$

Comme h_a, t_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (VII)–(VIII) et (X)–(XIII) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 272)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et R et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 261).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 273)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\left(S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}\right) \quad bc = 2Rh_a \tag{I}$$

$$c \sin\beta = h_a \tag{II}$$

$$\frac{2ac\sin\beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{III}$$

$$\sin\beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{IV}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{V}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta. \tag{VI}$$

Avec (I), nous obtenons

$$b = \frac{2Rh_a}{c}. \tag{VII}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{VIII}$$

Avec (II), (VI) et (VIII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{IX}$$

Avec (V), (VII) et (VIII), nous obtenons

$$a^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{ac} = \left(\frac{2Rh_a}{c}\right)^2. \tag{X}$$

Comme h_a, t_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (IX) et (X) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 274)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 263).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 275)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c\sin\beta = h_a \tag{I}$$

$$\frac{2ac\sin\beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{II}$$

$$\sin\beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{III}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta. \tag{IV}$$

Avec (II) et (III), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{V}$$

Avec (I), (IV) et (V), nous obtenons

$$\Big[1-\Big(\frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}\Big)^2\Big]c^2 = h_a^2. \tag{VI}$$

Maintenant nous écrivons le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2 \tag{VII}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r}{a+c-b} \implies b = a+c-2r\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}}. \tag{VIII}$$

Avec (V) et (VII)–(VIII), nous obtenons

$$a^2+c^2-\frac{2(ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{ac} = \Big(a+c-2r\sqrt{\frac{(2ac)^2-[(a-c)t_b]^2}{[(a-c)t_b]^2}}\Big)^2. \tag{IX}$$

Comme h_a, t_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (VI) et (IX) avec Mathematica pour obtenir a et c et ensuite b.

Exercice 276)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 265).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 277)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 266).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 278)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, t_b et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 275).

Exercice 279)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$c \sin\beta = h_a \tag{I}$$

$$\frac{2ac\sin\beta/2}{|a-c|} = t_b \tag{II}$$

$$\sin\beta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{III}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r_b}{a+b+c}. \tag{IV}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta \tag{V}$$

$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2. \tag{VI}$$

Avec (II) et (III), nous obtenons

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}. \tag{VII}$$

Avec (I), (V) et (VII), nous obtenons

$$\left[1 - \left(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2. \tag{VIII}$$

Avec (IV) et (VII), nous obtenons

$$\sqrt{\frac{[(a-c)t_b]^2}{(2ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}} = \frac{2r_b}{a+b+c}. \tag{IX}$$

Avec (VI) et (VII), nous obtenons

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)t_b]^2}{ac}. \tag{X}$$

Comme h_a, t_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (VIII)–(X) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 280)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons h_a, t_b et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 279).

Exercice 281)

Premier procédé - Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons r_a. Avec le datum a, R et $r_a - r$, nous obtenons a. Nous connaissons alors a, h_a et R et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 158).

Deuxième procédé - Méthode de la figure auxiliaire

Le problème est résolu si nous pouvons construire $\triangle\, \mathrm{A}H_aI$ (figure auxiliaire). Nous commençons avec le théorème suivant:

Théorème 16: *Les distances (d_a, d_b et d_c) entre les sommets* **A**, **B** *et* **C** *et le centre I d'un triangle sont données par les relations*

$$d_a = \sqrt{2R(h_a - 2r)}; \quad d_b = \sqrt{2R(h_b - 2r)}; \quad d_c = \sqrt{2R(h_c - 2r)},$$

où R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit, respectivement.

Démonstration:

Nous allons prouver que $d_a = \overline{\mathbf{A}I} = \sqrt{2R(h_a - 2r)}$, les deux autres cas se prouvant de la même façon. Nous avons besoin du résultat préliminaire suivant: $\overline{II_a} = 2\sqrt{R(r_a - r)}$.

Démonstration:

Soit la figure 71 (voir aussi la figure 57). OD est la médiane du $\triangle OII_a$. Nous pouvons écrire:

$$\overline{OD} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2) - \overline{II_a}^2}. \qquad (*)$$

Nous connaissons $\overline{OI}^2$ et $\overline{OI_a}^2$, données par les théorèmes 14 et 15, respectivement, et $\overline{OD} = R$. Si nous mettons ces valeurs dans $(*)$, nous obtenons

$$\overline{II_a} = 2\sqrt{R(r_a - r)}. \qquad \blacksquare$$

Avec l'aide de la figure 78, nous pouvons dire que $\triangle\, \mathrm{A}IP \sim \triangle\, \mathrm{A}I_aQ$.

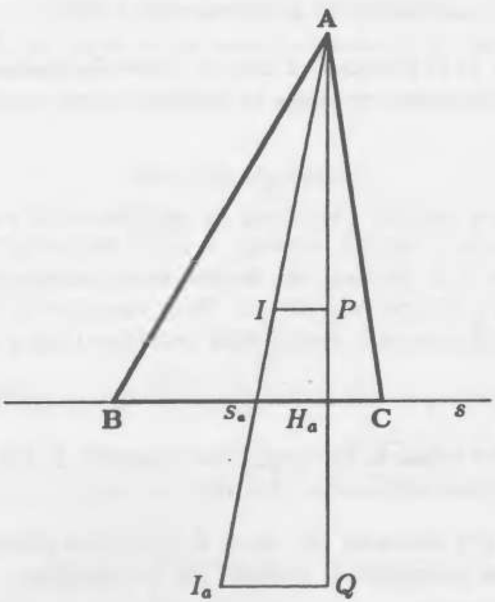


Figure 78

Si nous posons $x = \overline{\mathbf{A}I}$, nous pouvons écrire:

$$\frac{x}{x+\overline{II_a}} = \frac{h_a - r}{h_a + r_a}.$$

Comme $r_a = rh_a/(h_a - 2r)$, nous obtenons $\overline{\mathbf{A}I} = \sqrt{2R(h_a - 2r)}$. ■

Avec $\overline{\mathbf{A}I}$ connue, la construction du $\triangle\, \mathbf{A}H_aI$ est immédiate, après quoi nous construisons facilement $\triangle\, \mathbf{ABC}$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Observations:

i) avec les résultats présentés à la fin de l'exercice 15, nous aurions pu démontrer que $\overline{II_b} = 2\sqrt{R(r_b - r)}$ de la façon suivante: nous dessinons la figure 79, extraite de la figure 15:

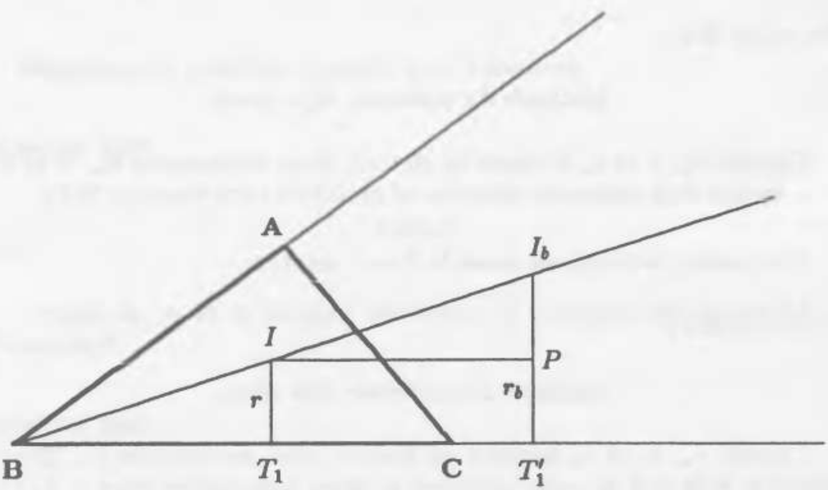


Figure 79

Comme $\triangle\, IPI_b$ est un triangle rectangle, nous pouvons écrire

$$\overline{II_b}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{PI_b}^2.$$

Mais, $\overline{IP} = \overline{T_1T_1'} = \overline{\mathbf{B}T_1'} - \overline{\mathbf{B}T_1} = b$ et $\overline{PI_b} = r_b - r$. Donc,

$$\overline{II_b}^2 = b^2 + (r_b - r)^2.$$

Le théorème 10 nous dit que $b^2 = (r_b - r)(4R - (r_b - r))$. Par conséquent,

$$\overline{II_b} = 2\sqrt{R(r_b - r)}.$$

ii) soit la figure 57. OU est la médiane du $\triangle OI_bI_c$. Nous pouvons écrire:

$$\overline{OU} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2) - \overline{I_bI_c}^2}. \qquad (*)$$

Nous connaissons $\overline{OI_b}^2$ et $\overline{OI_c}^2$, données par le théorème 15, et $\overline{OU} = R$. Si nous mettons ces valeurs dans $(*)$, nous obtenons

$$\overline{I_bI_c} = 2\sqrt{R(r_b + r_c)}.$$

De façon similaire, nous démontrons que

$$\overline{I_aI_c} = 2\sqrt{R(r_a + r_c)}$$
$$\overline{I_aI_b} = 2\sqrt{R(r_a + r_b)}.$$

Exercice 282)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, R et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 281).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 283)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons r_c. Avec le datum a, R et $r_b + r_c$, nous obtenons a. Nous connaissons alors a, h_a et R et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 158).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 284)

Datum

Comme h_a, r et r_a forment un datum, le problème est impossible ou indéterminé.

Exercice 285)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, r et r_b forment un datum, nous connaissons h_a, h_b et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 230).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 286)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, r et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 285).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 287)

Datum

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, le problème est impossible ou indéterminé.

Exercice 288)

Méthode de la figure auxiliaire

Soit la figure 80. Le problème est résolu si nous pouvons construire le point G et $\triangle\, \mathbf{A}DM_a$ (figure auxiliaire), où $\overline{M_bD} = \overline{M_bM_c}$ $(= a/2)$.

Une analyse de la figure 80 nous montrera que les diagonales du quadrilatère $\mathbf{A}DCM_c$ se coupent en leur milieu (point M_b); donc, le quadrilatère $\mathbf{A}DCM_c$ est un parallélogramme et $\overline{\mathbf{A}D} = \overline{\mathbf{C}M_c} = m_c$. En outre, le quadrilatère $\mathbf{B}M_bDM_a$ est un parallélogramme aussi parce que nous savons que les segments $\mathbf{B}M_a$ et M_bD sont égaux et parallèles; donc, $\overline{\mathbf{B}M_b} = \overline{M_aD} = m_b$.

Nous connaissons alors les trois côtés du $\triangle \mathbf{A}DM_a$ et il peut être construit (voir exercice 128). D'où la construction qui suit (voir figure 80):

i) construire $\triangle \mathbf{A}DM_a$ où $\overline{\mathbf{A}D} = m_c$, $\overline{\mathbf{A}M_a} = m_a$ et $\overline{DM_a} = m_b$. Placer le point G sur le segment $M_a\mathbf{A}$ tel que $\overline{M_aG} = \overline{M_a\mathbf{A}}/3$. Soit r la droite définie par les points D et M_a;

ii) tracer à partir du point G la droite s parallèle à la droite r. Du point G, avec une ouverture de compas égale à $2m_b/3$, construire un arc de cercle (ϕ_1) et $\mathbf{B} \in s \cap \phi_1$. Soit t la droite définie par les points $\mathbf{B}$ et M_a. Du point M_a, avec une ouverture de compas égale à $\overline{M_a\mathbf{B}}$, construire un arc de cercle (ϕ_2) et $\mathbf{C} \in t \cap \phi_2$.

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

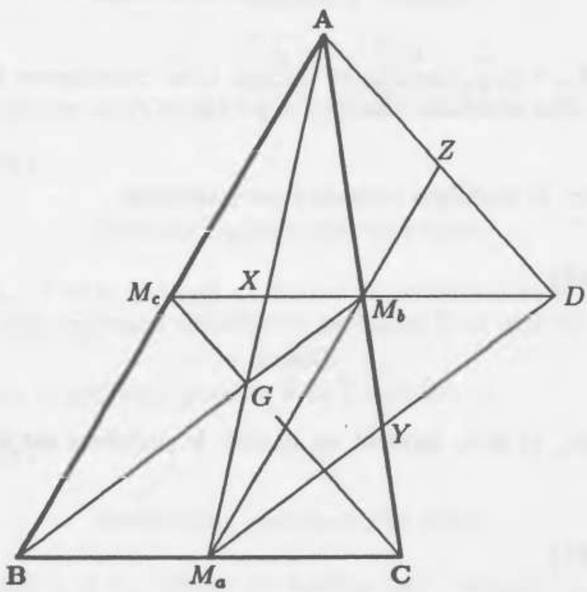


Figure 80

Observation: une étude de la figure 80 nous permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 17: *Avec les médianes m_a, m_b et m_c du $\triangle \mathbf{ABC}$, nous construisons un nouveau $\triangle \mathbf{A}DM_a$ et ses médianes $\mathbf{A}Y$, DX et M_aZ (voir figure 80). Alors*

$$\overline{\mathbf{A}Y} = \frac{3}{4}b; \qquad \overline{DX} = \frac{3}{4}a; \qquad \overline{M_aZ} = \frac{3}{4}c.$$

Démonstration:

Nous notons d'abord que DX est bel et bien une médiane du $\triangle\, \mathbf{A}DM_a$ parce que X est le point d'intersection du segment M_cM_bD avec le segment $\mathbf{A}M_a$. En outre, $\overline{XM_b} = \overline{XM_c} = a/4$. Par conséquent, $\overline{M_bD} = 2\overline{M_bX}$ et M_b est le barycentre du $\triangle\, \mathbf{A}DM_a$. Donc

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{A}Y} &= \overline{\mathbf{A}M_b} + \overline{M_bY} = \tfrac{b}{2} + \tfrac{b}{4} = \tfrac{3}{4}b \\
\overline{DX} &= \overline{DM_b} + \overline{M_bX} = \tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{4} = \tfrac{3}{4}a \\
\overline{M_aZ} &= \overline{M_aM_b} + \overline{M_bZ} = \tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{4} = \tfrac{3}{4}c. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observation: soient S, S', S_1 et S_2 les aires des triangles $\mathbf{ABC}$, $\mathbf{A}DM_a$, $DX\mathbf{A}$ et DXM_a, respectivement. Nous pouvons écrire

$\dfrac{S}{S'} = \dfrac{S}{S_1 + S_2} = \dfrac{a}{\overline{DX}} = \dfrac{4}{3}$. Alors,

$S = \dfrac{4}{3}S' = \dfrac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$ où $m = \dfrac{m_a + m_b + m_c}{2}$.

Exercice 289)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{II}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2. \tag{III}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$a^2 = \frac{4m_a^2 + 8m_b^2 - 6c^2}{3} \tag{IV}$$

$$b^2 = \frac{8m_a^2 + 4m_b^2 - 6c^2}{3}. \tag{V}$$

Avec (III), (IV) et (V), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&c^2(8m_a^2 + 4m_b^2 - 6c^2)\left[3c^2 + 4m_a^2 - 4m_b^2 - 6s_a^2\right]^2 = \\
&\qquad = 3\left[12c^4 - (16m_a^2 + 8m_b^2 + 3s_a^2)c^2 + 4(2m_a^2 + m_b^2)s_a^2\right]^2. \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

Comme m_a, m_b et s_a sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir c.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

L'équation (†) devient

$$1458t^4 - 300465t^3 + 22006548t^2 - 658168128t + 6287855616 = 0, \quad (‡)$$

où $c = \sqrt{t}$.

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$t_1 = 64 \implies c_1 = 8\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm} \quad \text{et} \quad b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$t_2 = 53{,}669307470669 \implies c_2 = 7{,}325933\,9\,\text{cm} \implies$$

$$a_2 = \sqrt{153 - 2t_2} = 6{,}757320\,8\,\text{cm} \quad \text{et} \quad b_2 = \sqrt{177 - 2t_2} = 8{,}346339\,6\,\text{cm}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les triangles (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 290)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \quad \text{(I)}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \quad \text{(II)}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = s_c^2. \quad \text{(III)}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$a^2 = \frac{4m_a^2 + 8m_b^2 - 6c^2}{3} \quad \text{(IV)}$$

$$b^2 = \frac{8m_a^2 + 4m_b^2 - 6c^2}{3}. \quad \text{(V)}$$

Avec (III), (IV) et (V), nous obtenons

$$\left[4s_c^2c^2 + 2a^2b^2 - 4(m_a^2 + m_b^2)s_c^2\right]^2 = a^2b^2\left[5c^2 + 2s_c^2 - 4(m_a^2 + m_b^2)\right]^2. \quad \text{(VI)}$$

Comme m_a, m_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (IV)–(VI) avec Mathematica pour obtenir c et ensuite a et b.

Exercice 291)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$
$$2(a^2+c^2)-b^2=4m_b^2 \tag{II}$$
$$\frac{2bc\sin\alpha/2}{|b-c|}=t_a \implies \sin^2\alpha/2=\frac{[(b-c)t_a]^2}{4b^2c^2} \tag{III}$$
$$\sin\alpha/2=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{IV}$$
$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{V}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$a^2=\frac{4m_a^2+8m_b^2-6c^2}{3} \tag{VI}$$
$$b^2=\frac{8m_a^2+4m_b^2-6c^2}{3}. \tag{VII}$$

Avec (III), (IV) et (V), nous obtenons

$$2bc+a^2-b^2-c^2=\frac{[(b-c)t_a]^2}{bc}. \tag{VIII}$$

Comme m_a, m_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (VI)–(VIII) avec Mathematica pour obtenir c et ensuite a et b.

Exercice 292)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$a^2=\frac{4m_a^2+8m_b^2-6c^2}{3} \tag{I}$$
$$b^2=\frac{8m_a^2+4m_b^2-6c^2}{3} \tag{II}$$
$$2ab+c^2-a^2-b^2=\frac{[(a-b)t_c]^2}{ab}. \tag{III}$$

Comme m_a, m_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir c et ensuite a et b.

Exercice 293)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$2(a^2+c^2)-b^2=4m_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2 \implies \cos^2\alpha=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \qquad \text{(III)}$$

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R} \implies \cos^2\alpha=1-\frac{a^2}{4R^2}. \qquad \text{(IV)}$$

Avec (I) et (II), nous obtenons

$$b=\sqrt{\frac{3a^2+4(m_a^2-m_b^2)}{3}} \qquad \text{(V)}$$

$$c=\sqrt{\frac{4(m_a^2+2m_b^2)-3a^2}{6}}. \qquad \text{(VI)}$$

Avec (III)–(VI), nous obtenons

$$18t^3-9(8m_b^2+9R^2)t^2+8[9R^2(m_a^2+4m_b^2)-4(m_a^4+m_a^2m_b^2-2m_b^4)]t+ \\ +16(8m_a^2m_b^2-m_a^4-16m_b^4)R^2=0, \qquad (\dagger)$$

où $a=\sqrt{t}$.

Comme m_a, m_b et R sont connus, nous pouvons résoudre (†) avec Mathematica pour obtenir t et ensuite a.

Si l'équation (†) n'a pas de racine positive, le problème est impossible (il n'y a pas de triangle qui satisfait aux conditions du problème).

Application numérique: soient $m_a=\frac{\sqrt{201}}{2}$ cm, $m_b=\frac{\sqrt{129}}{2}$ cm et $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm.

L'équation (†) devient

$$2t^3-405t^2+8039t-180075=0. \qquad (\ddagger)$$

Résolvant (‡) avec Mathematica, nous obtenons (avec six chiffres décimaux exacts):

$$t_1=25 \implies a_1=5\,\text{cm} \implies b_1=7\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_1=8\,\text{cm}$$

$$t_2=\frac{355-\sqrt{68401}}{4} \implies a_2=4{,}833842\,9\,\text{cm} \implies$$

$$b_2=6{,}882298\,9\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_2=8{,}050899\,4\,\text{cm}$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les triangles (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exercice 294)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b = \sqrt{\frac{3a^2 + 4(m_a^2 - m_b^2)}{3}} \qquad \text{(I)}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2 + 2m_b^2) - 3a^2}{6}} \qquad \text{(II)}$$

$$\tan \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{2r}{b + c - a} \qquad \text{(III)}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad \text{(IV)}$$

Avec (I)–(IV), nous obtenons

$$4(4bc + 4m_a^2 - a^2)r^2 = (a^2 + 4bc - 4m_a^2)\left[b + c - a\right]^2. \qquad \text{(V)}$$

Comme m_a, m_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a et ensuite b et c.

Exercice 295)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b = \sqrt{\frac{3a^2 + 4(m_a^2 - m_b^2)}{3}} \qquad \text{(I)}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2 + 2m_b^2) - 3a^2}{6}} \qquad \text{(II)}$$

$$\tan \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{2r_a}{a + b + c} \qquad \text{(III)}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad \text{(IV)}$$

Avec (I)–(IV), nous obtenons

$$4(4bc + 4m_a^2 - a^2)r_a^2 = (a^2 + 4bc - 4m_a^2)\left[a + b + c\right]^2. \qquad \text{(V)}$$

Comme m_a, m_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a et ensuite b et c.

Exercice 296)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$b = \sqrt{\frac{3a^2 + 4(m_a^2 - m_b^2)}{3}} \tag{I}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2 + 2m_b^2) - 3a^2}{6}} \tag{II}$$

$$\tan \gamma/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos\gamma}{1 + \cos\gamma}} = \frac{2r_c}{a + b + c} \tag{III}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \tag{IV}$$

Avec (I)–(IV), nous obtenons

$$4[(a + b)^2 - c^2]r_c^2 = [c^2 - (a - b)^2][a + b + c]^2. \tag{V}$$

Comme m_a, m_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a et ensuite b et c.

Exercice 297)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} = s_a^2 \tag{II}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a + c)^2} = s_b^2. \tag{III}$$

Comme m_a, s_a et s_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 298)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \tag{II}$$

$$ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=s_c^2. \tag{III}$$

Comme m_a, s_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 299)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, m_a et s_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 235).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 300)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ac\sin\beta/2}{|a-c|}=t_b \implies \cos\beta=\frac{2a^2c^2-[(a-c)t_b]^2}{2a^2c^2} \tag{III}$$

$$a^2+c^2-2ac\cos\beta=b^2. \tag{IV}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$a^2+c^2-\frac{2a^2c^2-[(a-c)t_b]^2}{ac}=b^2. \tag{V}$$

Comme m_a, s_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 301)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{2bc \sin \alpha/2}{|b-c|} = t_a \implies \cos \alpha = \frac{2b^2c^2 - [(b-c)t_a]^2}{2b^2c^2} \tag{III}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2. \tag{IV}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$b^2 + c^2 - \frac{2b^2c^2 - [(b-c)t_a]^2}{bc} = a^2. \tag{V}$$

Comme m_a, s_b et t_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 302)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, s_b et t_b forment un datum, nous connaissons h_b, m_a et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 237).

Exercice 303)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{2ab \sin \gamma/2}{|a-b|} = t_c \implies \cos \gamma = \frac{2a^2b^2 - [(a-b)t_c]^2}{2a^2b^2} \tag{III}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2. \tag{IV}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$a^2 + b^2 - \frac{2a^2b^2 - [(a-b)t_c]^2}{ab} = c^2. \tag{V}$$

Comme m_a, s_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 304)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \tag{II}$$

$$2R\sin\alpha=a \implies \sin^2\alpha=\left(\frac{a}{2R}\right)^2 \tag{III}$$

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2 \implies \cos^2\alpha=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2. \tag{IV}$$

Comme $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, nous obtenons, avec (III) et (IV),

$$(4R^2-a^2)b^2c^2=\left[(b^2+c^2-a^2)R\right]^2. \tag{V}$$

Comme m_a, s_a et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 305)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \tag{II}$$

$$(4R^2-a^2)b^2c^2=\left[(b^2+c^2-a^2)R\right]^2. \tag{III}$$

Comme m_a, s_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 306)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \tag{II}$$

$$\tan\alpha/2=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2r}{b+c-a} \tag{III}$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{IV}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\Big(\frac{2r}{b+c-a}\Big)^2. \tag{V}$$

Comme m_a, s_a et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 307)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\Big(\frac{2r}{b+c-a}\Big)^2. \tag{III}$$

Comme m_a, s_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 308)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \tag{II}$$

$$\tan\alpha/2=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2r_a}{a+b+c} \tag{III}$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{IV}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\left(\frac{2r_a}{a+b+c}\right)^2. \qquad \text{(V)}$$

Comme m_a, s_a et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 309)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\tan\beta/2=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}=\frac{2r_b}{a+b+c} \qquad \text{(III)}$$

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}. \qquad \text{(IV)}$$

Avec (III) et (IV), nous obtenons

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2}=\left(\frac{2r_b}{a+b+c}\right)^2. \qquad \text{(V)}$$

Comme m_a, s_a et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(II) et (V) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 310)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\left(\frac{2r_a}{a+b+c}\right)^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme m_a, s_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 311)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2}=\left(\frac{2r_b}{a+b+c}\right)^2. \tag{III}$$

Comme m_a, s_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 312)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}=\left(\frac{2r_c}{a+b+c}\right)^2. \tag{III}$$

Comme m_a, s_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 313)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}=t_a \implies \frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2}=t_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}=t_b \implies \frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2}=t_b^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_a et t_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 314)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2}=t_b^2 \qquad \text{(II)}$$
$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2}=t_c^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme m_a, t_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 315)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2}=t_a^2 \qquad \text{(II)}$$
$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=R^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme m_a, t_a et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 316)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2}=t_b^2 \qquad \text{(II)}$$
$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=R^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme m_a, t_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 317)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2}=t_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}=4r^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_a et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 318)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2}=t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}=4r^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 319)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2}=t_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2}=4r_a^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_a et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 320)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{bc(a + c - b)(a + b - c)}{(b - c)^2} = t_a^2 \tag{II}$$

$$\frac{[b^2 - (a - c)^2](a + b + c)^2}{(a + c)^2 - b^2} = 4r_b^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_a et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 321)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b + c - a)(a + b - c)}{(a - c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2 - (b - c)^2](a + b + c)^2}{(b + c)^2 - a^2} = 4r_a^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 322)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b + c - a)(a + b - c)}{(a - c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[b^2 - (a - c)^2](a + b + c)^2}{(a + c)^2 - b^2} = 4r_b^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 323)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$
$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2}=t_b^2 \tag{II}$$
$$\frac{[c^2-(a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}=4r_c^2. \tag{III}$$

Comme m_a, t_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 324)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$
$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=R^2 \tag{II}$$
$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}=4r^2. \tag{III}$$

Comme m_a, R et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 325)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$
$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=R^2 \tag{II}$$
$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2}=4r_a^2. \tag{III}$$

Comme m_a, R et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 326)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=R^2 \tag{II}$$

$$\frac{[b^2-(a-c)^2](a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2}=4r_b^2. \tag{III}$$

Comme m_a, R et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 327)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, m_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 247).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 328)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, r et r_b forment un datum, nous connaissons h_b, m_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 248).

Exercice 329)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_c, r_a et r_b forment un datum, nous connaissons h_c, m_a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 252).

Exercice 330)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons h_a, m_a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 250).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 331)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = s_c^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme s_a, s_b et s_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Utilisant la théorie des systèmes d'équations non linéaires (voir [21], par exemple), on peut démontrer que (voir [18]) le système (I)–(III) possède *toujours un et un seul point fixe*. Donc nous avons la discussion suivante:

Discussion: on peut construire toujours un et un seul triangle.

Observation: pour démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour le système (I)–(III), les auteurs de [18] ont fait appel au résultat préliminaire suivant:

$$b + c = \sqrt{s_a^2 + (p-b)^2} + \sqrt{s_a^2 + (p-c)^2}. \qquad (*)$$

Démontrons l'égalité (*) (la démonstration qui suit nous a été envoyée par L. Panaitopol, l'un des auteurs de l'article mentionné): nous savons que $s_a^2 = bc - a^2bc/(b+c)^2$. Alors,

$$4s_a^2 = 4bc - \frac{4a^2bc}{(b+c)^2}$$

Soit $\delta \in \{-1, 1\}$, i.e., $\delta = \pm 1$. Nous avons:

$$4s_a^2 + [a + \delta(b-c)]^2 = 4bc - \frac{4a^2bc}{(b+c)^2} + a^2 + (b-c)^2 + 2\delta a(b-c)$$

$$4s_a^2 + [a + \delta(b-c)]^2 = (b+c)^2 + \frac{a^2(b-c)^2}{(b+c)^2} + 2\delta a(b-c)$$

$$4s_a^2 + [a + \delta(b-c)]^2 = \left[b + c + \delta\frac{a(b-c)}{b+c}\right]^2.$$

Comme $b+c>a$ et $b+c>|b-c|$, il s'ensuit que $b+c+\delta\dfrac{a(b-c)}{b+c}>0$.

Donc, pour $\delta=1$ (équation (**)) et $\delta=-1$ (équation (***)), on obtient:

$$b+c+\frac{a(b-c)}{b+c}=\sqrt{4s_a^2+[a+b-c]^2}=2\sqrt{s_a^2+(p-c)^2} \qquad (**)$$

$$b+c-\frac{a(b-c)}{b+c}=\sqrt{4s_a^2+[a-b+c]^2}=2\sqrt{s_a^2+(p-b)^2}, \qquad (***)$$

où $p=(a+b+c)/2$. Additionnant (**) et (***), nous avons:

$$b+c=\sqrt{s_a^2+(p-b)^2}+\sqrt{s_a^2+(p-c)^2}. \qquad \blacksquare$$

Exercice 332)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et s_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 254).

Exercice 333)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=s_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=s_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2}=t_c^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme s_a, s_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 334)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2. \tag{III}$$

Comme s_a, s_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 335)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2. \tag{III}$$

Comme s_a, s_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 336)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2. \tag{III}$$

Comme s_a, s_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 337)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = s_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[c^2-(a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} = 4r_c^2. \tag{III}$$

Comme s_a, s_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 338)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et t_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 257).

Exercice 339)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2} = t_c^2. \tag{III}$$

Comme s_a, t_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 340)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et R et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 261).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 341)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme s_a, t_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 342)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 263).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 343)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme s_a, t_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 344)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 265).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 345)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, s_a et t_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 266).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 346)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2. \tag{III}$$

Comme s_a, t_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 347)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[b^2-(a-c)^2](a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2} = 4r_b^2. \tag{III}$$

Comme s_a, t_b et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 348)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[c^2-(a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} = 4r_c^2. \tag{III}$$

Comme s_a, t_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 349)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2. \tag{III}$$

Comme s_a, R et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 350)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2. \tag{III}$$

Comme s_a, R et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 351)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{II}$$

$$\frac{[b^2-(a-c)^2](a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2} = 4r_b^2. \tag{III}$$

Comme s_a, R et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 352)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 263).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 353)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, r et r_b forment un datum, nous connaissons h_b, s_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 264).

Exercice 354)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_c, r_a et r_b forment un datum, nous connaissons h_c, s_a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 268).

Exercice 355)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons h_a, s_a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 266).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 356)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2} = t_c^2. \tag{III}$$

Comme t_a, t_b et t_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 357)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = R^2. \tag{III}$$

Comme t_a, t_b et R sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 358)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2. \tag{III}$$

Comme t_a, t_b et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 359)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \tag{II}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2. \tag{III}$$

Comme t_a, t_b et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 360)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = t_b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{[c^2-(a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} = 4r_c^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme t_a, t_b et r_c sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 361)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme t_a, R et r sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 362)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2. \qquad \text{(III)}$$

Comme t_a, R et r_a sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 363)

Méthode algébrique

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = t_a^2 \tag{I}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{II}$$

$$\frac{[b^2-(a-c)^2](a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2} = 4r_b^2. \tag{III}$$

Comme t_a, R et r_b sont connus, nous pouvons résoudre le système (I)–(III) avec Mathematica pour obtenir a, b et c.

Exercice 364)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r et r_a forment un datum, nous connaissons h_a, t_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 274).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 365)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_b, r et r_b forment un datum, nous connaissons h_b, t_a et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 275).

Exercice 366)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_c, r_a et r_b forment un datum, nous connaissons h_c, t_a et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 279).

Exercice 367)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_a, r_b et r_c forment un datum, nous connaissons h_a, t_a et r_b et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 277).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 368)

Méthode du problème déjà résolu

Comme a, R et $r_a - r$ forment un datum, nous connaissons a, R et r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 215).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 369)

Méthode du problème déjà résolu

Comme c, R et $r_a + r_b$ forment un datum, nous connaissons c, R et r_a et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 217).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 370)

Méthode du problème déjà résolu

Comme h_i, r et r_i, $(i = a, b)$ forment un datum, nous connaissons h_a et h_b. Avec le datum h_c, r_a et r_b, nous obtenons h_c. Nous connaissons alors h_a, h_b et h_c et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 222).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

Exercice 371)

Méthode du problème déjà résolu

Nous savons que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$. Nous obtenons r et nous savons déjà comment résoudre ce problème (voir exercice 370).

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.

APPENDICE

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DU TROISIÈME ET QUATRIÈME DEGRÉS

Nous avons vu que dans plusieurs problèmes nous devions trouver les racines d'une équation algébrique (ou polynomiale) du troisième ou quatrième[§] degrés. Normalement ces racines seront obtenues par des méthodes algébriques ou numériques; cependant, dans certains cas spéciaux, les racines de ces polynômes pourront être obtenues géométriquement. Nous allons donc montrer comment résoudre ces équations algébriquement et donner des critères pour que leurs racines puissent être obtenues graphiquement.

1 Résolution des équations algébriques du troisième degré

Soit l'équation

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0, \tag{I}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Nous savons qu'avec la transformation

$$y = x - \frac{a}{3}$$

nous éliminons le terme en y^2 de l'équation (I), obtenant

$$x^3 + px + q = 0, \tag{II}$$

où

$$p = \frac{1}{3}(3b - a^2) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c).$$

[§] Parfois appelées équations cubique ou quartique.

La résolution de (II) est un problème célèbre, qui a une longue histoire (voir [4], [17] et [29], par exemple). Nous allons présenter ici seulement les formules qui donnent les racines de (II), laissant leur déduction et les discussions reliées aux ouvrages qui traitent en détail du sujet (voir [3], [5] et [30], par exemple).

Les formules qui résolvent (II) ont été publiées pour la première fois en 1545 par Hieronimo (Girolamo) Cardano (1501–1576) et pour cette raison sont connues sous le nom de formules de Cardano.

Pour résoudre (II), nous commençons par calculer

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

et nous avons $\Delta \gtreqless 0$. Nous allons étudier ces trois possibilités séparément.

a) $\Delta > 0$.

Si $\Delta > 0$, (II) (et (I)) aura une racine réelle et les deux autres racines seront complexes conjuguées. Soient

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}.$$

Les racines de (II) sont:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \\ x_2 &= -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} + i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2} \\ x_3 &= -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} - i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2}. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation originale (I) sont

$$y_j = -\frac{a}{3} + x_j, \; j = 1, 2, 3.$$

b) $\Delta = 0$.

Si $\Delta = 0$, $A = B = -q/2$ et (II) aura trois racines réelles dont deux au moins seront égales. Les racines de (II) sont:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

$$x_2 = x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Les racines de l'équation originale (I) sont

$$y_j = -\frac{a}{3} + x_j, \ j = 1, 2, 3.$$

c) $\Delta < 0$.

Si $\Delta < 0$, (II) aura trois racines réelles distinctes. Nous calculons

$$\phi = \operatorname{Arccos} \frac{q\sqrt{27}}{2p\sqrt{-p}} \qquad (0 \le \phi \le \pi).$$

Les racines de (II) sont:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\frac{\phi}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}) \\ x_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}). \end{aligned}$$

Les racines de l'équation originale (I) sont

$$y_j = -\frac{a}{3} + x_j, \ j = 1, 2, 3.$$

2 Résolution des équations algébriques du quatrième degré

Soit l'équation

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0, \tag{I}$$

où a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

Nous savons qu'avec la transformation

$$y = x - \frac{a}{4}$$

nous éliminons le terme en y^3 de l'équation (I), obtenant

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \tag{II}$$

Pour résoudre (II), nous allons utiliser la méthode découverte par Luigi Ferrari (1522–1565), un élève de Cardano. Nous pouvons écrire (II) comme

$$x^4 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2}{4} = (\lambda - p)x^2 - qx + \frac{\lambda^2}{4} - r$$

$$\left(x^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (\lambda - p)x^2 - qx + \frac{\lambda^2 - 4r}{4}. \tag{III}$$

Nous calculons λ pour que le membre de droite de (III) soit le carré parfait d'une expression linéaire $ex + f$.

Nous savons que (voir [30])

$$Ax^2 + Bx + C = (ex + f)^2 \iff B^2 - 4AC = 0.$$

Si nous appliquons ce résultat à l'équation (III), nous obtenons

$$(-q)^2 - (\lambda^2 - 4r)(\lambda - p) = 0$$
$$g(\lambda) = \lambda^3 - p\lambda^2 - 4r\lambda + 4pr - q^2 = 0. \tag{IV}$$

L'équation cubique (IV) est appelée la *cubique résolvante* de la quartique. Soit λ_1 une racine réelle (et si possible rationnelle) de (IV). Nous pouvons écrire (III) comme

$$\left(x^2 + \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 = (ex + f)^2, \tag{V}$$

où e, f sont adéquatement choisis.

Résolvant (V) nous obtenons deux équations quadratiques qui nous donneront les quatre racines de (I).

Exemple 1. Résoudre l'équation

$$y^4 + 2y^3 - 6y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Avec la transformation $y = x - \frac{1}{2}$, nous obtenons l'équation

$$x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 5x + \frac{5}{16} = 0.$$

La cubique résolvante est

$$\lambda^3 + \frac{15}{2}\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda - \frac{275}{8} = 0. \tag{$*$}$$

Nous faisons la transformation $z = k\lambda$ et $(*)$ peut être écrite comme

$$z^3 + \frac{15}{2}kz^2 - \frac{5}{4}k^2z - \frac{275}{8}k^3 = 0.$$

Si nous posons $k = 2$, nous obtenons

$$z^3 + 15z^2 - 5z - 275 = 0.$$

Avec la transformation $z = \alpha - 5$, nous obtenons l'équation

$$\alpha^3 - 80\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0 \Longrightarrow z_1 = -5 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{5}{2}.$$

Nous pouvons écrire (III) comme

$$\left(x^2 + \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 = \left(\lambda_1 + \frac{15}{2}\right)x^2 - 5x + \frac{\lambda_1^2 - 5/4}{4}$$

$$\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} = \left(\sqrt{5}x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2. \qquad (**)$$

De (**), nous obtenons

$$x^2 - \frac{5}{4} = \left(\sqrt{5}x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{5}{4} = -\left(\sqrt{5}x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{-\sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} \\ x_4 = \dfrac{-\sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} \end{cases}$$

Comme $y_j = x_j - \frac{1}{2}$, $j = 1,2,3,4$, nous avons les quatre racines de l'équation originale:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$y_{3,4} = \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

Observation: nous constatons que nous pouvons obtenir graphiquement les quatre racines et

$$f(y) = y^4 + 2y^3 - 6y^2 - 2y + 1 \equiv \left(y^2 + (\sqrt{5}+1)y - 1\right)\left(y^2 - (\sqrt{5}-1)y - 1\right).$$

Nous concluons que le polynôme $f(y)$ ne peut pas être mis sous la forme d'un produit de polynômes à coefficients rationnels et pour cette raison nous disons que de tels polynômes sont irréductibles (ou indécomposables) sur $\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres rationnels).

3 Équations algébriques du troisième et quatrième degrés dont les racines peuvent être obtenues géométriquement

Nous pouvons facilement obtenir — au moins en théorie —, par des constructions géométriques assez élémentaires, les racines des polynômes à coefficients entiers du premier (ou 2^0) et second (ou 2^1) degrés. Dans cette section, nous présenterons des critères que les polynômes de troisième et quatrième degrés doivent satisfaire pour que nous puissions obtenir géométriquement au moins une de leurs racines.

3.1 Critère pour les équations du troisième degré

Soit

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

un polynôme du troisième degré. Nous commençons par remarquer que si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $f(x)$ possède une racine rationnelle, alors ses *trois* racines pourront être obtenues géométriquement.

En effet, si $f(x)$ possède une racine rationnelle α/β, nous pourrons le décomposer en facteurs comme

$$f(x) \equiv (\beta x - \alpha)(px^2 + qx + r),$$

où $\alpha, \beta, p, q, r \in \mathbb{Z}$ et nous savons que nous pouvons construire aisément les racines de facteurs linéaires et quadratiques.

Théorème A.1: *Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, alors $f(x)$ aura une racine qui pourra être obtenue graphiquement si et seulement si une de ses racines est (un nombre) rationnelle.*

Démonstration: voir [3].

Étant donné ce théorème, nous nous confrontons maintenant avec le problème de savoir si une équation cubique possède ou non une racine rationnelle. Heureusement, ce problème est résolu avec le théorème suivant qui, étant très important, apparaît dans n'importe quel ouvrage didactique qui traite de la théorie des équations:

Théorème A.2: *Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et α/β est une racine rationnelle de $f(x)$, où α et β sont des entiers relativement premiers (on dit aussi que α et β sont premiers entre eux, i.e., n'ont aucun facteur commun), alors α divise d et β divise a.*

Exemple 2. Montrer que l'équation

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

possède une racine rationnelle.

Soit x_1 une racine rationnelle. Alors $x_1 = \alpha/\beta$, où α divise 6 et β divise 2, i.e.,

$$\alpha \text{ peut être } \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3 \text{ ou } \pm 6 \text{ et}$$
$$\beta \text{ peut être } \pm 1 \text{ ou } \pm 2.$$

D'où α/β aura ± 1, $\pm 1/2$, ± 2, $\pm 3/2$, ± 3 ou ± 6 comme ensemble de possibilités. Nous constatons que $f(\pm 1) \neq 0$ et $f(1/2) = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &\equiv (x - \frac{1}{2})(2x^2 - 2x - 12) \\ &\equiv (2x-1)(x^2 - x - 6) \\ &\equiv (2x-1)(x-3)(x+2), \end{aligned}$$

i.e., les racines de $f(x)$ sont $\{\frac{1}{2}, 3, -2\}$ et nous pouvons les obtenir graphiquement.

Exemple 3. Montrer que l'équation

$$f(x) = 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

ne possède aucune racine rationnelle.

Nous avons ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$ ou $\pm 1/8$ comme ensemble de possibilités et aucun de ces nombres n'est une racine de $f(x)$. Donc, les racines de $f(x)$ ne peuvent pas être obtenues graphiquement.

3.2 Critère pour les équations du quatrième degré

Soient
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0)$$
un polynôme du quatrième degré et $g(\lambda)$ sa cubique résolvante.

Théorème A.3: *Si $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, alors $f(x)$ aura une racine qui pourra être obtenue graphiquement si et seulement si $f(x)$ ou $g(\lambda)$ possède une racine rationnelle.*

Démonstration: voir [3].

Théorème A.4: *Si $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, alors toutes les racines de $f(x)$ pourront être obtenues graphiquement si et seulement si $g(\lambda)$ possède une racine rationnelle.*

Démonstration: voir [3].

Exemple 4. Problème 77 original

Lors du problème 77, nous avons dû résoudre l'équation

$$f(c) = 300c^4 - 3120c^3 - 1163c^2 + 72240c - 134848 = 0. \qquad (*)$$

Nous commençons par savoir si $f(c)$ peut posséder une racine rationnelle. L'application du théorème A.2 dans ce cas ne serait pas pratique à cause du très grand nombre de possibilités à examiner. Pour des équations comme $(*)$, le prochain résultat peut s'avérer utile:

Théorème A.5: *Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où $a_n \neq 0$ et $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Si, pour un nombre premier p quelconque, nous avons*

$$a_n f(0) f(1) \cdots f(p-1) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

alors l'équation $f(x) = 0$ ne possède aucune racine rationnelle.

Démonstration: voir [7].

Nous commençons par supposer que $f(c)$ ne possède aucune racine rationnelle et appliquons le théorème A.5 avec $p \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P} = \{\, 2, 3, 5, \ldots, 31 \,\}$. Si $a_n f(0) f(1) \cdots f(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ $\forall p \in \mathcal{P}$, alors nous avons plus de raisons pour supposer que $f(c)$ peut posséder une racine rationnelle et seulement à ce moment-ci nous appliquons le résultat du théorème A.2.

Nous avons, pour $f(c)$ et $p \in \mathcal{P}$, les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{rlrl}
a_n = a_4 = & 300 \quad (\div 2, 3, 5) & f(4) = & 12624 \\
a_0 = f(0) = & -134848 \quad (\div 7, 43) & f(5) = & -\ 5223 \\
f(1) = & -\ 66591 & f(6) = & -28396 \\
f(2) = & -\ 15180 \quad (\div 11, 23) & f(7) = & -36015 \\
f(3) = & \ \ 11465 & f(8) = & 0 \quad (\div 13, 17, 19, 29, 31, \ldots)
\end{array}$$

Nous trouvons la racine $c = 8$. Nous pouvons écrire $(*)$ comme

$$f(c) = (c-8)(300c^3 - 720c^2 - 6923c + 16856) = 0.$$

Maintenant nous répétons le test du théorème A.5 avec $p \in \mathcal{P}$ pour le polynôme

$$h(c) = 300c^3 - 720c^2 - 6923c + 16856. \qquad (**)$$

Nous découvrons que, si $p = 13$, alors

$$300h(0)h(1) \cdots h(12) \not\equiv 0 \pmod{13}.$$

Donc, le polynôme $h(c)$ donné par $(**)$ ne possède aucune racine rationnelle et ses racines ne peuvent pas être construites. Par conséquent, $c = 8$ est la seule racine du polynôme $f(c)$ donné par $(*)$ que l'on peut obtenir graphiquement.

Pour justifier les trois prochains exemples, nous énonçons le théorème suivant:

Théorème A.6: *Un nombre peut être construit géométriquement si et seulement s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers irréductible sur $\mathbb{Q}$ et dont le degré est une puissance entière positive ou nulle de 2.*

Démonstration: voir [11], chapitre 39.

Le théorème A.6 nous dit que si $f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i$ ($a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i,\ a_4 \neq 0$) est irréductible sur $\mathbb{Q}$, alors ses racines pourront être construites. Quant aux équations polynomiales générales à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 5, nous savons qu'elles ne possèdent pas de solution générale par extraction des radicaux; par conséquent, les racines des polynômes de degré 2^k, $k \geq 3$, qui satisfont aux conditions du théorème A.6 ne pourront pas être obtenues algébriquement, encore moins graphiquement.

Exemple 5. Soit α le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{3}}$. Montrer que α est la racine d'un polynôme qui satisfait aux conditions du théorème A.6.

Nous écrivons $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{3}}$ et nous avons:

$$\begin{aligned}
\alpha - \sqrt{2} &= \sqrt{1+\sqrt{3}} \\
\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 &= 1 + \sqrt{3} \\
\alpha^2 + 1 &= 2\sqrt{2}\alpha + \sqrt{3} \\
\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 &= 8\alpha^2 + 4\sqrt{6}\alpha + 3 \\
\alpha^4 - 6\alpha^2 - 2 &= 4\sqrt{6}\alpha \\
\alpha^8 - 12\alpha^6 + 32\alpha^4 - 72\alpha^2 + 4 &= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le nombre α est une racine du polynôme

$$x^8 - 12x^6 + 32x^4 - 72x^2 + 4. \qquad (*)$$

Pour montrer que $(*)$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$, nous calculons ses huit racines x_i. Nous posons $t = x^2$ et nous écrivons $(*)$ comme

$$t^4 - 12t^3 + 32t^2 - 72t + 4. \qquad (**)$$

Résolvant $(**)$, nous obtenons $\lambda_1 = -10$ (racine de la cubique résolvante) et les racines t_i sont

$$\begin{aligned}
t_1 &= 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+2\sqrt{3}} \\
t_2 &= 3 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2+2\sqrt{3}} \\
t_3 &= 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2-2\sqrt{3}} \\
t_4 &= 3 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2-2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Les racines de $(*)$ sont $x_i = \pm\sqrt{t_j}$, $j = 1,2,3,4$ et $\alpha = x_1 = +\sqrt{t_1} = \sqrt{3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}}$(!). Donc, $(*)$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ et nous constatons que $(*)$ satisfait à toutes les autres conditions du théorème A.6.

Un cas plus compliqué est présenté dans le prochain exemple.

Exemple 6. Soit γ le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$. Montrer que γ est la racine d'un polynôme qui satisfait aux conditions du théorème A.6.

Nous remarquons que $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5+\sqrt{24}}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{7} = \sqrt{12+\sqrt{140}}$. Inspirés par les exemples 1 et 5, nous construisons le polynôme $g(x)$ de degré 8 dont les racines r_i, $i = 1,\dots,8$ sont:

$$\begin{aligned}
\gamma = r_1 &= \sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{12+\sqrt{140}} & r_5 &= \sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{12+\sqrt{140}}\\
r_2 &= \sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{12+\sqrt{140}} & r_6 &= \sqrt{5-\sqrt{24}}-\sqrt{12+\sqrt{140}}\\
r_3 &= -\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{12-\sqrt{140}} & r_7 &= -\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{12-\sqrt{140}}\\
r_4 &= -\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{12-\sqrt{140}} & r_8 &= -\sqrt{5-\sqrt{24}}-\sqrt{12-\sqrt{140}}.
\end{aligned}$$

Nous posons $g(x) = \prod_{i=1}^{8}(x - r_i)$ et obtenons

$$x^8 - 68x^6 - 16\sqrt{105}x^5 + 926x^4 + 416\sqrt{105}x^3 + 5452x^2 + 176\sqrt{105}x - 215 = 0. \tag{$*$}$$

Nous sommes presque rendus. Nous écrivons $(*)$ comme

$$x^8 - 68x^6 + 926x^4 + 5452x^2 - 215 = 16\sqrt{105}x(x^4 - 26x^2 - 11) \tag{$**$}$$

et élevons $(**)$ au carré. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
f(x) = x^{16} - 136x^{14} + 6476x^{12} - 141912x^{10} + 1513334x^8 - 7453176x^6 +\\
+ 13950764x^4 - 5596840x^2 + 46225 = 0. \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

Pour montrer que $f(x)$ donné par $(\dagger)$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$, nous calculons ses seize racines x_j. Nous posons $t = x^2$ et nous écrivons $(\dagger)$ comme

$$\begin{aligned}
t^8 - 136t^7 + 6476t^6 - 141912t^5 + 1513334t^4 - 7453176t^3 +\\
+ 13950764t^2 - 5596840t + 46225 = 0. \qquad (\ddagger)
\end{aligned}$$

Nous savons (par construction) que r_i, $i = 1, \ldots, 8$ est une racine de (†). Donc, $t_i = r_i^2$ est une racine de (‡) et les seize racines x_j, $j = 1, \ldots, 16$ de (†) sont

$$x_j = \pm\sqrt{t_i} = \pm\sqrt{r_i^2}, \; i = 1, \ldots, 8; \quad \text{et} \quad \gamma = x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{r_1^2} =$$
$$= \sqrt{17 + 2[\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21} + \sqrt{35}]} \text{ (!?)}.$$

Nous concluons que (†) est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ et nous constatons que (†) satisfait à toutes les autres conditions du théorème A.6.

Pour illustrer le fait que, généralement, les racines des polynômes de degré 4 à coefficients entiers et irréductibles sur $\mathbb{Q}$ ne pourront pas être obtenues graphiquement, nous donnons l'exemple suivant:

Exemple 7. Problème 77 perturbé

Nous perturbons légèrement les paramètres du problème 77 afin de rendre le polynôme (†) de la page 101 irréductible sur $\mathbb{Q}$. Nous supposons que $\cos\alpha = \frac{11}{14}$, $m_b = 3{,}5$ cm et $s_a = 2\sqrt{7}$ cm. L'équation (†) devient

$$f(c) = 100c^4 - 780c^3 + 371c^2 + 6860c - 9604 = 0. \tag{I}$$

Pour que toutes les conditions du théorème A.6 soient satisfaites, nous devons montrer que $f(c)$ donné par (I) est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Si l'on peut décomposer $f(c)$ (sur $\mathbb{Q}$) en un produit dont un facteur est linéaire, alors $f(c)$ possède une racine rationnelle. Nous appliquons le théorème A.5 au polynôme $f(c)$ et nous découvrons que si $p = 19$, alors

$$100f(0)f(1)\cdots f(18) \not\equiv 0 \pmod{19}.$$

Donc le polynôme $f(c)$ donné par (I) ne possède aucune racine rationnelle et nous ne pouvons pas le mettre sous la forme

$$(\beta c + \alpha)(pc^3 + qc^2 + rc + s),$$

avec $\alpha, \beta, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, si l'on peut décomposer $f(c)$ en un produit de deux facteurs quadratiques en $\mathbb{Q}$, alors nous pouvons l'écrire comme

$$f(c) = 100((c^2 + pc + q)(c^2 + rc + s)),$$

où $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$ et $f(c)$ est écrit comme

$$f(c) = 100\left(c^4 - \frac{780}{100}c^3 + \frac{371}{100}c^2 + \frac{6860}{100}c - \frac{9604}{100}\right).$$

Égalisant les coefficients des puissances de même degré en c dans les deux représentations de $f(c)$, nous devons avoir

$$qs = -\left(\frac{98}{10}\right)^2 \Longrightarrow q = -s = \pm\frac{98}{10} \Longrightarrow q + s = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$ps + qr = \frac{6860}{100} \Longrightarrow p - r = \pm 7 \qquad \text{(ii)}$$

$$pr + q + s = \frac{371}{100} \Longrightarrow pr = \frac{371}{100} \qquad \text{(iii)}$$

$$p + r = -\frac{780}{100}. \qquad \text{(iv)}$$

Avec (ii) et (iv), nous obtenons $pr = \frac{296}{100} \neq \frac{371}{100}$ et par conséquent $f(c)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (nous arrivons à la même conclusion si nous commençons notre analyse avec d'autres valeurs pour q et s comme $q = -9604$ et $s = 1/100$).

Les conditions du théorème A.6 sont satisfaites. Les racines de $f(c)$ données par (I) peuvent donc être construites géométriquement; cependant, pour qu'on puisse les *obtenir* graphiquement, il faut que la cubique résolvante de $f(c)$ possède une racine rationnelle (théorème A.4).

Pour trouver la cubique résolvante, nous écrivons (I) comme

$$c^4 - \frac{39}{5}c^3 + \frac{371}{100}c^2 + \frac{343}{5}c - \frac{2401}{25} = 0.$$

Nous posons $c = x - \frac{1}{4}\left(-\frac{39}{5}\right) = x + \frac{39}{20}$ pour éliminer le terme en c^3. Nous obtenons

$$f(x) = x^4 - \frac{7642}{20^2}x^2 + \frac{95}{4}x + \frac{1353641}{400^2} = 0. \qquad \text{(II)}$$

La cubique résolvante de (II) est

$$g(\lambda) = 4000^2\lambda^3 + 305680000\lambda^2 - 541456400\lambda - 19369524522 = 0. \qquad \text{(III)}$$

Pour savoir si $g(\lambda)$ donné par (III) possède une racine rationnelle, nous appliquons le test du théorème A.5 avec $p \in \mathcal{P}$. Nous découvrons que si $p = 11$, alors

$$4000^2 g(0)g(1)\cdots g(10) \neq 0 \pmod{11}.$$

La cubique résolvante ne possède donc aucune racine rationnelle et par conséquent nous ne pouvons pas obtenir graphiquement les racines de (I). Nous pouvons cependant calculer des valeurs approchées qui pourraient être obtenues graphiquement. Si λ_1 est une racine de (III), les racines de (I) sont données par

$$c_1 = \frac{39 + \sqrt{1910{,}5 + 100\lambda_1} + \sqrt{1910{,}5 - 100\lambda_1 - \sqrt{40000\lambda_1^2 - 1353641}}}{20}$$

$$c_2 = \frac{39 + \sqrt{1910{,}5 + 100\lambda_1} - \sqrt{1910{,}5 - 100\lambda_1 - \sqrt{40000\lambda_1^2 - 1353641}}}{20}$$

$$c_3 = \frac{39 - \sqrt{1910{,}5 + 100\lambda_1} + \sqrt{1910{,}5 - 100\lambda_1 + \sqrt{40000\lambda_1^2 - 1353641}}}{20}$$

$$c_4 = \frac{39 - \sqrt{1910{,}5 + 100\lambda_1} - \sqrt{1910{,}5 - 100\lambda_1 + \sqrt{40000\lambda_1^2 - 1353641}}}{20}.$$

Avec c_i, nous obtenons b_i et a_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$b_i = \frac{s_a c_i}{2c_i \cos\alpha/2 - s_a} = \frac{14c_i}{5c_i - 14}.$$

$$a_i = \sqrt{b_i^2 + c_i^2 - \frac{11}{7} b_i c_i}.$$

Résolvant (III), nous obtenons $\lambda_1 \approx 7{,}423192161$ (avec neuf chiffres décimaux exacts). Avec cette valeur pour λ_1, nous calculons c_i, b_i et a_i (avec six chiffres décimaux exacts):

$$c_1 = 5{,}309415\,4\,\text{cm} \implies b_1 = 5{,}924233\,6\,\text{cm et } a_1 = 3{,}722684\,6\,\text{cm}$$

$$c_2 = 3{,}741137\,2\,\text{cm} \implies b_2 = 11{,}130347\,5\,\text{cm et } a_2 = 8{,}511533\,9\,\text{cm}$$

$$c_3 = 1{,}660774\,8\,\text{cm} \implies b_3 < 0$$

$$c_4 < 0.$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles dont les côtés sont (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Montrons maintenant que nous pouvons construire un polynôme de degré 4 à coefficients entiers et irréductible sur $\mathbb{Q}$, dont les racines pourront toujours (en supposant quelques restrictions sur les valeurs des paramètres qui forment ses coefficients, comme nous le verrons) être obtenues graphiquement.

Soit le problème 157, i.e., construire un triangle **ABC** dont on connaît a, h_b et t_c. Nous commençons par former le système suivant:

$$\sin\gamma = h_b/a \tag{I}$$

$$\sin\gamma = 2\sin\gamma/2\cos\gamma/2 \tag{II}$$

$$\frac{2ab\sin\gamma/2}{|b-a|} = t_c \tag{III}$$

$$\cos^2\gamma = 1-\sin^2\gamma = \frac{a^2-h_b^2}{a^2} \tag{IV}$$

$$\cos\gamma/2 = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}. \tag{V}$$

Avec le système (I)–(V), on obtient l'équation suivante:

$$f(b) = t_c^4(b-a)^4 - 4a^2t_c^2b^2(b-a)^2 + 4a^2h_b^2b^4 = 0. \tag{VI}$$

Comme a, h_b et t_c sont connus, $f(b)$ donné par (VI) est un polynôme de degré 4 en b. Nous avons vu que nous pouvons résoudre le problème 157 graphiquement; par conséquent, les racines (côté b) de (VI) peuvent être obtenues graphiquement et la cubique résolvante de (VI) possède une racine rationnelle.

Exemple 8. Construire un triangle **ABC** si $a = 5\,\text{cm}$, $h_b = 5\sqrt{3}/2\,\text{cm}$ et $t_c = 40/3\,\text{cm}$.

L'équation (VI) devient

$$f(b) = 407b^4 - 11776b^3 + 111360b^2 - 409600b + 512000 = 0. \tag{$*$}$$

Résoudre $(*)$ algébriquement serait laborieux. En résolvant le problème graphiquement, i.e., avec les techniques de la géométrie analytique, nous posons $\mathbf{B} = (-5,0)$ et $\mathbf{C} = (0,0)$. Ensuite, avec les données du problème, nous obtenons, dans l'ordre:

$$\begin{aligned}
H_{b_1} &= \left(-\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right) && \text{et} \quad H_{b_2} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)\\
T_{c_1} &= \left(-\frac{20}{3}, -\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) && \text{et} \quad T_{c_2} = \left(\frac{20}{3}, \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)\\
\mathbf{A}_1 &= (-4, 4\sqrt{3}) && \Longrightarrow b_1 = 8\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_1 = 7\,\text{cm} \qquad (\gamma_1 = 60^\circ)\\
\mathbf{A}_2 &= \left(-\frac{20}{11}, \frac{20\sqrt{3}}{11}\right) && \Longrightarrow b_2 = \frac{40}{11}\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{5\sqrt{97}}{11}\,\text{cm} \qquad (\gamma_1 = 60^\circ)
\end{aligned}$$

Ayant calculé b_1 et b_2, nous pouvons écrire $f(b)$ donné par $(*)$ comme

$$f(b) = (b-8)(11b-40)(37b^2-640b+1600).$$

Les racines de $37b^2 - 640b + 1600 = 0$ nous donnent les deux autres côtés b_3 et b_4.

$$b_3 = \frac{320 + 120\sqrt{3}}{37} \text{ cm} \implies c_3 = \sqrt{a^2 + b_3^2 + ab_3} \text{ cm} \qquad (\gamma_2 = 120°)$$
$$b_4 = \frac{320 - 120\sqrt{3}}{37} \text{ cm} \implies c_4 = \sqrt{a^2 + b_4^2 + ab_4} \text{ cm} \qquad (\gamma_2 = 120°)$$

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les quatre triangles dont les côtés sont (a, b_1, c_1), (a, b_2, c_2), (a, b_3, c_3) et (a, b_4, c_4) satisfont à toutes les conditions du problème.

Exemple 9. Construire un triangle **ABC** si $a = h_b = 5\,\text{cm}$ et $t_c = 1$ cm.

Si $a = h_b$ et $t_c = 1$, l'équation (VI) devient

$$[2a^2 - 1]^2 b^4 + 4a(2a^2 - 1)b^3 + 2a^2(3 - 2a^2)b^2 - 4a^3 b + a^4 = 0. \qquad (*)$$

En posant $a = 5$, l'équation $(*)$ devient

$$2401b^4 + 980b^3 - 2350b^2 - 500b + 625 = 0. \qquad (**)$$

Encore une fois, l'équation $(**)$ nous paraît compliquée à résoudre algébriquement. En résolvant le problème graphiquement (remarquer que $\gamma = 90°$), nous posons $\mathbf{B} = (-5, 0)$ et $\mathbf{C} = (0, 0)$. Ensuite, avec les données du problème, nous obtenons:

$$H_b \equiv \mathbf{C} = (0, 0)$$
$$T_c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\mathbf{A} = \left(0, \frac{5[5\sqrt{2} - 1]}{49}\right)$$

Par conséquent,

$$b_1 = \frac{5[5\sqrt{2} - 1]}{49} \implies c_1 = \sqrt{a^2 + b_1^2}$$
$$b_2 = -\frac{5[5\sqrt{2} + 1]}{49} \quad \text{(solution étrangère)},$$

après quoi nous constatons que nous pouvons écrire $(**)$ comme

$$(49b^2 + 10b - 25)^2 = 0,$$

i.e., b_1 (et b_2) est une racine double et le problème n'a qu'une seule solution.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que le triangle dont les côtés sont (a, b_1, c_1) satisfait à toutes les conditions du problème.

Exemple 10. Construire un triangle **ABC** si $a = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$ et $h_b = t_c = \sqrt{2}\,\text{cm}$.

Avec ces données, l'équation (VI) devient

$$f(b) = b^4 + 56\sqrt{2}b^3 - 80b^2 - 64\sqrt{2}b + 64 = 0. \qquad (*)$$

L'équation $(*)$ ne nous paraît pas compliquée à résoudre algébriquement. La cubique résolvante de $f(b)$ est

$$g(\lambda) = \lambda^3 + 80\lambda^2 - 7424\lambda - 430080 = 0. \qquad (**)$$

L'équation $(**)$ possède une racine rationnelle (entière et positive) qui doit diviser 430080. En essayant les candidats 105, 70, 84 et 80, on constate que $g(80) = 0$. Alors, on peut écrire $f(b)$ donné par $(*)$ comme

$$f(b) = [b^2 + (28\sqrt{2} - 24\sqrt{3})b + 40 - 16\sqrt{6}] \times \\ \times [b^2 + (28\sqrt{2} + 24\sqrt{3})b + 40 + 16\sqrt{6}]. \qquad (***)$$

Les deux racines positives de $(***)$ sont

$$b_1 = 12\sqrt{3} - 14\sqrt{2} + \sqrt{784 - 320\sqrt{6}} = 12\sqrt{3} - 14\sqrt{2} - 8\sqrt{6} + 20 \qquad (\gamma_1 = 30°)$$

$$b_2 = 12\sqrt{3} - 14\sqrt{2} - \sqrt{784 - 320\sqrt{6}} = 12\sqrt{3} - 14\sqrt{2} + 8\sqrt{6} - 20 \qquad (\gamma_2 = 150°)$$

Avec a, b_1 et γ_1, on obtient $c_1 = \sqrt{8 + b_1^2 - 2\sqrt{6}b_1}$; avec a, b_2 et γ_2, on obtient $c_2 = \sqrt{8 + b_2^2 + 2\sqrt{6}b_2}$.

Vérification: le lecteur peut facilement constater que les deux triangles dont les côtés sont (a, b_1, c_1) et (a, b_2, c_2) satisfont à toutes les conditions du problème.

Observation: en résolvant ce problème graphiquement, on obtient

$$b_1 = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}} = 12\sqrt{3} - 14\sqrt{2} - 8\sqrt{6} + 20.$$

Nous avons obtenu l'équation (VI) en supposant, évidemment, que $0 < h_b \leq a$ et $t_c > 0$ (ensemble $\mathbb{E}$). De plus, si $\mathbb{F}$ est l'ensemble des nombres que l'on peut construire graphiquement, alors pour les valeurs de a, h_b et t_c telles que $a, h_b, t_c \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$, les racines des polynômes de degré 4 qui en découlent peuvent être obtenues graphiquement. Pour voir si nous pouvons élargir l'ensemble $\mathbb{E}$ (mais tout en conservant la condition que les racines puissent être obtenues graphiquement), nous développons l'équation (VI), obtenant

$$(4a^2h_b^2 + t_c^4 - 4a^2t_c^2)b^4 + (8a^3t_c^2 - 4at_c^4)b^3 + \\ + (6a^2t_c^4 - 4a^4t_c^2)b^2 - 4a^3t_c^4b + a^4t_c^4 = 0. \qquad \text{(VII)}$$

En regardant de près les coefficients de (VII), nous constatons que les paramètres h_b et t_c y apparaissent toujours élevés à une puissance paire; quant au paramètre a, il apparaît toujours élevé à une puissance paire dans les coefficients de b^4, b^2 et b^0 (le terme indépendant) et à une puissance impaire dans les coefficients de b^3 et b. Par conséquent, si $a, h_b, t_c \in \mathbb{F}$ et $|h_b| \leq |a|$, alors les racines de (VII) pourront être obtenues graphiquement.

Exemple 11. "Construire un triangle **ABC** si $a = t_c = 1\,\text{cm}$ et $h_b = 0\,\text{cm}$."

L'équation (VII) devient

$$f(b) = 3b^4 - 4b^3 - 2b^2 + 4b - 1 = 0. \qquad (*)$$

Nous constatons que nous pouvons écrire le polynôme $f(b)$ donné par $(*)$ comme

$$f(b) = (3b - 1)(b + 1)(b - 1)^2$$

et nous concluons que ses racines peuvent être obtenues graphiquement.

Exemple 12. "Construire un triangle **ABC** si $a = -5\,\text{cm}$, $h_b = \pm\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}$ et $t_c = \pm 40/3\,\text{cm}$."

L'équation (VII) devient

$$f(b) = 407b^4 + 11776b^3 + 111360b^2 + 409600b + 512000 = 0. \qquad (*)$$

En comparant cette équation avec l'équation $(*)$ de l'exemple 8, on conclut que les deux polynômes $f(b)$ ont des racines symétriques.

Il nous resterait à montrer que les racines de (VII) peuvent ou ne peuvent pas être obtenues graphiquement si $a, h_b, t_c \in \mathbb{F}$ et $|h_b| > |a|$; nous ne rentrerons cependant pas dans cette analyse, nous contentant seulement de présenter un seul et dernier exemple.

Exemple 13. "Construire un triangle **ABC** si $a = t_c = 1\,\text{cm}$ et $h_b = 2\,\text{cm}$."

L'équation (VII) devient

$$f(b) = 13b^4 + 4b^3 + 2b^2 - 4b + 1 = 0. \qquad (*)$$

En faisant le changement de variable $b = y/13$, l'équation $(*)$ devient

$$y^4 + 4y^3 + 26y^2 - 676y + 2197 = 0. \qquad (**)$$

La cubique résolvante de $(**)$ est

$$g(\lambda) = \lambda^3 - 26\lambda^2 - 11492\lambda - 263640 = 0. \qquad (***)$$

En essayant quelques candidats possibles, on constate que $g(130) = 0$. La cubique résolvante possède une racine rationnelle! Nous pouvons écrire $(**)$ comme

$$\left[y^2 + (2 + 6\sqrt{3})y + 65 + 26\sqrt{3}\right]\left[y^2 + (2 - 6\sqrt{3})y + 65 - 26\sqrt{3}\right]. \qquad (****)$$

Les racines de $(**)$ sont complexes et $b_i = y_i/13$, $i = 1, 2, 3, 4$, où les y_i sont les quatre racines de $(****)$.

BIBLIOGRAPHIE ET RÉFÉRENCES

[1] Altshiller-Court, N., *College Geometry*, Barnes & Noble, New York, 1952.

[2] Barbeau, E.J., *Polynomials*, Springer-Verlag, 1989.

[3] Borofsky, S., *Elementary Theory of Equations*, The Macmillan Company, 1961.

[4] Boyer, C.B., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968.

[5] Cajori, F., *An Introduction to the Theory of Equations*, Dover, 1969.

[6] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1969.

[7] Dorroh, J.L. and Howell, L.B., "On the rational roots of polynomial equations", *The American Mathematical Monthly* **53**, 1946, pp. 383–384.

[8] "Elementary problems and solutions", *The American Mathematical Monthly* **67**, 1960, pp. 185–186.

[9] "Elementary problems and solutions", *The American Mathematical Monthly* **95**, 1988, pp. 458–460.

[10] Fisher, R.C. et Ziebur, A.D., *Algèbre et Trigonométrie*, Beauchemin, Montréal, 1966.

[11] Fraleigh, J.B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, 1972.

[12] Hadamard, J., *Leçons de Géométrie, Volume I (Géométrie plane)*, Éditions Jacques Gabay, 1988.

[13] Hadlock, C.R., *Field Theory and its Classical Problems*, Carus Monograph # 19, The Mathematical Association of America, 1978.

[14] *Hungarian Problem Book I*, New Mathematical Library # 11, Random House, New York, 1963.

[15] Iezzi, G., *Fundamentos de Matemática Elementar # 6*, Atual Editora, São Paulo, 1993.

[16] Johnson, R.A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960.

[17] Milies, C.P., "A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau", *Revista do Professor de Matemática* **25**, 1994, pp. 15–22, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05389-970.

[18] Mironescu, P. and Panaitopol, L., "The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths", *The American Mathematical Monthly* **101**, 1994, pp. 58–60.

[19] Morgado, A.C.O., Wagner, E. et Jorge, M., *Geometria I*, Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1990.

[20] Niven, I., *Numbers: Rational and Irrational*, New Mathematical Library # 1, Random House, New York, 1961.

[21] Ortega, J.M. et Rheinboldt, W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, 1970.

[22] Petersen, J., *Methods and Theories for the Solution of Problems of Geometrical Constructions*, G.E. Stechert & Co., New York, 1927.

[23] Polya, G., *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, 1957.

[24] Polya, G., *Mathematical Discovery - Volume I*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

[25] Putnoki, J.C., *Elementos de Geometria & Desenho Geométrico*, Editora Scipione, São Paulo, 1989.

[26] Smart, J.R., *Modern Geometries*, Brooks/Cole, Monterey, California, 1973.

[27] Spiegel, M.R., *Formules et Tables de Mathématiques*, Série Schaum, McGraw-Hill, 1983.

[28] Tessier, G.J.-M et Beaugrand, R., *Manuel de Géométrie Plane*, Centre de Psychologie et de Pédagogie, Montréal, 1958.

[29] Tietze, H., *Famous Problems of Mathematics*, Graylock Press, New York, 1965.

[30] Uspensky, J.V., *Theory of Equations*, McGraw-Hill, 1948.

[31] Wagner, E., *Construções Geométricas*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.